IZ SADRŽAJA OVE KNJIGE:

Elektrostatika • Proračun osnovnih električnih veličina • Nerazgranata i razgranata kola istosmerne struje i metode rešavanja • Elektromagnetizam • Nerazgranata i razgranata kola naizmenične struje • Trofazne struje

Muhamed Hajro

# Zbirka zadataka iz elektrotehnike



MUHAMED HAJRO, dipl. inž.

# ZBIRKA ZADATAKA IZ ELEKTROTEHNIKE

IV IZDANJE




NOVINSKO-IZDAVAČKA RADNA ORGANIZACIJA
**TEHNIČKA KNJIGA**
BEOGRAD, 1986.

## *PREDGOVOR*

*Ova zbirka zadataka iz elektrotehnike rađena je prema programu za elektrotehničke škole — odsek jake i slabe struje. U svakoj glavi posebno su dati osnovni pojmovi i formule, izrađeni primeri i dati zadaci za samostalno rešavanje sa rezultatima na kraju knjige. Pojedini zadaci, nešto teži za rešavanje od ostalih, mogu se rešavati u višim razredima kada se bude gradivo ponavljalo, a mogu biti namenjeni i učenicima koji se pripremaju za studije. Zadaci se mogu, dobrim izborom od strane predmetnog nastavnika, upotrebljavati i za škole za radnička zanimanja elektro struke kao i za polaganje ispita za visokokvalifikovane radnike. Svi primeri i zadaci rađeni su saglasno Međunarodnom sistemu jedinica.*

*Posebnu zahvalnost dugujem recenzentu, dipl. inž. Rajku Misiti, koji mi je korisnim sugestijama pomogao pri izradi knjige.*

*Autor*

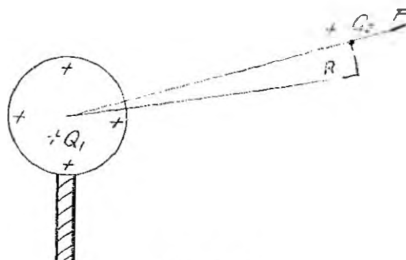
# 1. ELEKTROSTATIKA

Oblast elektrotehnike koja proučava elektricitet u mirovanju naziva se elektrostatika. Nosioci elektrostatičkih pojava su dielektrici (grčka reč »dia« znači »kroz«), koji imaju slobodnih elektrona u zanemarivim količinama.

## 1.1. KULONOV ZAKON, ELEKTRIČNO POLJE I ELEKTRIČNI POTENCIJAL

### 1.1.1. Osnovni pojmovi i formule

Prvi kvantitativni zakon o iznosu privlačno-odbojne sile između naelektrisanih tela postavio je Kulon (sl. 1.1.1).



Sl. 1.1.1

Taj zakon glasi:

$$F = \frac{Q_1 \cdot Q_2}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot R^2} \text{ [N]} \qquad (1.1.1)$$

gde su:

$F$ [N] — intenzitet (jačina) sile između dva naelektrisana tela,

$Q_1$ i $Q_2$ [C] — količina elektriciteta (električni tovari),
$R$ [m] — međusobno rastojanje naelektrisanih tela,
$\varepsilon_r$ — relativna dielektrična konstanta i

$\varepsilon_0 \left[\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}\right]$ — apsolutna dielektrična konstanta vakuuma,

$\left(\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}\right)$

Površinska gustina elektriciteta definiše se kao odnos između količine elektriciteta $Q$ i površine $S$:

$$\sigma = \frac{Q}{S} \left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}\right] \quad (1.1.2)$$

Jačina električnog polja data je izrazom:

$$K = \frac{F}{Q} = \frac{U}{R} \left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right] \quad (1.1.3)$$

gde je $U$ [V] napon.

Potencijal električnog polja u bilo kojoj tački je:

$$\varphi_A = \frac{A}{R} = K \cdot \mathrm{R}\,[\mathrm{V}] \quad (1.1.4)$$

gde je $A$ [Ws] rad.

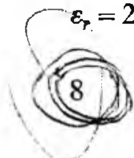
Razlika potencijala (napon) je:

$$U = \varphi_A - \varphi_B\,[\mathrm{V}] \quad (1.1.5)$$

### 1.1.2. **Primer**

**1. primer:** Metalna kuglica radijusa $R_k = 2$ cm naelektrisana je pozitivnim tovarom $Q = 2 \cdot 10^{-8}$ C (kulona) i postavljena u posudu velikih dimenzija.

U početku, u posudi je bio vakuum, a zatim smo je napunili mineralnim uljem, čija je relativna dielektrična konstanta $\varepsilon_r = 2{,}15$.



Treba izračunati silu $F$, kojom polje deluje na probni tačkasti tovar $q = 2 \cdot 10^{-10}$ C, u tačkama $A$, $B$ i $C$, udaljenim od centra kuglice (tačka $M$) na rastojanju $R$, jednakom 20, 40 i 60 cm. Izračunati jačinu polja i potencijal pre i posle punjenja posude uljem u istim tačkama. Pri proračunu zanemariti dimenzije kuglice.

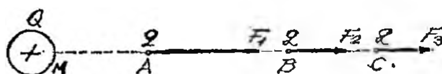
Rešenje: Električno polje pozitivnog tovara $Q$ deluje na tovara $q$ tački $A$ (sl. 1.1.2) silom:

$$F_1 = \frac{Q \cdot q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot R^2} = \frac{2 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{-10}}{4 \cdot \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1\,(0,2)^2} = 9 \cdot 10^{-7}\,\text{N}$$

Pomeranjem naboja $q$ u tačke $B$ i $C$ dobijamo sile:

$$F_2 = \frac{2 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{-10}}{4 \cdot \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}\,(0,4)^2} = 2,25 \cdot 10^{-7}\,\text{N}$$

$$F_3 = \frac{2 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{-10}}{4 \cdot \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}\,(0,6)^2} = 10^{-7}\,\text{N}$$




Sl. 1.1.2

Jačina električnog polja u pojedinim tačkama je:

$$K_A = \frac{F_1}{q} = \frac{9 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 10^{-10}} = 4500\,\frac{\text{V}}{\text{m}} = 4,5\,\frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

$$K_B = \frac{F_2}{q} = \frac{2,25 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 10^{-10}} = 1125\,\frac{\text{V}}{\text{m}} = 1,125\,\frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

$$K_C = \frac{F_3}{q} = \frac{10^{-7}}{2 \cdot 10^{-10}} = 500\,\frac{\text{V}}{\text{m}} = 0,5\,\frac{\text{kV}}{\text{m}}$$

Potencijali tačaka $A$, $B$, i $C$ iznose:

$$\varphi_A = K_A \cdot R_A = 4500 \cdot 0,2 = 900\,\text{V}$$

$$\varphi_B = K_B \cdot R_B = 1125 \cdot 0,4 = 450\,\text{V}$$

$$\varphi_C = K_C \cdot R_C = 500 \cdot 0,6 = 300\,\text{V}$$

Ako posudu napunimo mineralnim uljem ($\varepsilon_r = 2,15$) sile iznose:

$$F_1' = \frac{Q \cdot q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot R^2} = \frac{2 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{-10}}{4 \cdot \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 2,15\,(0,2)^2} =$$
$$= 4,18 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N}$$

$$F_2' = \frac{Q \cdot q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot R^2} = \frac{2 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{-10}}{4 \cdot \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 2,15\,(0,4)^2} =$$
$$1,045 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N}$$

$$F_3' = \frac{Q \cdot q}{4\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot R^2} = \frac{2 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{-10}}{4 \cdot \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 2,15\,(0,6)^2} =$$
$$= 0,465 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N}$$

Jačina električnog polja u pojedinim tačkama iznosi:

$$K_A' = \frac{F_1'}{q} = \frac{4,18 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 10^{-10}} = 2090\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

$$K_B' = \frac{F_2'}{q} = \frac{1,045 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 10^{-10}} = 522,5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

$$K_C' = \frac{F_3'}{q} = \frac{0,465 \cdot 10^{-7}}{2 \cdot 10^{-10}} = 232,5\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

Potencijali tačaka iznose:

$$\varphi_A = K_A' \cdot R_A = 2090 \cdot 0,2 = 418,0\,\mathrm{V}$$

$$\varphi_B = K_B' \cdot R_B = 522,5 \cdot 0,4 = 209,0\,\mathrm{V}$$

$$\varphi_C = K_C' \cdot R_C = 232,5 \cdot 0,6 = 139,50\,\mathrm{V}$$

### 1.1.3. **Zadaci za samostalno rešavanje**

1. Treba odrediti intenzitet sile između tačkastih tovara: $Q_1 = 1,5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$ i $Q_2 = 4,2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$, udaljenih međusobno $R = 5$ cm, ako se između njih nalazi trafo-ulje relativne dielektrične konstante $\varepsilon_r = 2,5$.

2. Kolika je udaljenost između naboja $Q_1 = 0{,}15 \cdot 10^{-6}$ C i $Q_2 = 3{,}12 \cdot 10^{-6}$ C, ako se nalaze u vazduhu i ako jedan na drugog deluju silom $F = 1{,}5$ N?

3. Treba odrediti veličinu naboja $Q$ kuglastog vodiča koji na udaljenosti $R = 25$ cm stvara polje jačine $K = 150 \dfrac{\text{kV}}{\text{m}}$.

4. Treba odrediti veličinu površine ravne ploče na kojoj se nalazi naboj $Q = 18 \cdot 10^{-7}$ C, a jačina polja iznosi $K = 56 \dfrac{\text{kV}}{\text{m}}$.

5. Ravni provodnici priključeni su na jednosmerni izvor energije, čiji polovi imaju potencijal $+200$ V, odnosno $-200$ V, a razmak između provodnika iznosi $R = 5$ mm. Treba odrediti jačinu polja između provodnika.

6. Treba odrediti razmak između dveju ravnih i paralelnih ploča koje su priključene na napon $U = 60$ V ako želimo ostvariti jačinu polja $K = 6 \dfrac{\text{kV}}{\text{m}}$.

7. Kugla poluprečnika $R_1 = 8$ m opterećena je sa $Q_1 = 1420$ C. Koliki mora biti poluprečnik $R_2$ druge kugle opterećene sa $Q_2 = 920$ C, da bi imala istu površinsku gustinu elektriciteta?

8. Dve kugle opterećene su količinama elektriciteta čiji je odnos $Q_1/Q_2 = 16$. U kom odnosu treba da stoje njihovi poluprečnici da bi površinska gustina obe kugle bila ista?

9. Odrediti veličinu napona električnog polja u vazduhu, a koje stvara tačkasti tovar $Q = 2 \cdot 10^{-8}$ C. Tačka je udaljena od tovara R = 3 m.

10. Potencijali dva provodnika, izolovana od zemlje, iznose $\varphi_1 = +25$ V i $\varphi_2 = -10$ V. Koliki rad treba izvršiti da bi se preneo tovar $Q = 10^{-4}$ C s jednog provodnika na drugi?

11. Na ploče kondenzatora, koje se nalaze na rastojanju R = 1 mm, priključen je napon $U = 120$ V. Odrediti jačinu polja i silu koja deluje na tovar $Q = 10^{-6}$ C, ako se on nalazi na sredini dielektrika.

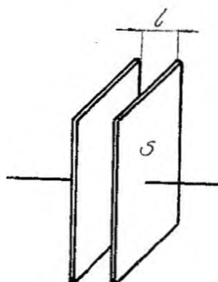
12. Metalna kugla radijusa $R_1 = 42{,}5$ cm nalazi se u vazduhu i ima naboj $Q = 10^{-6}$ C. Izračunati jačinu polja i potencijal na rastojanjima (od centra kugle) $R = 0$, $R = R_1$, $R = 2\,R_1$ i $R = 4\,R_1$.

## 1.2. PLOČASTI KONDENZATORI

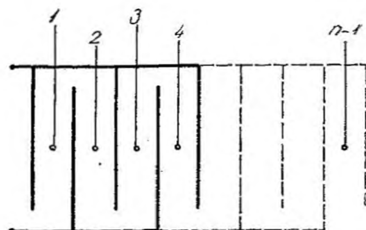
### 1.2.1. **Osnovni pojmovi i formule**

Kapacitet $C$ je sposobnost kondenzatora da pri datom naponu $U$ primi relativno velike količine elektriciteta $Q=C\cdot U$. Odatle i ime »kondenzator« (sakupljač). Kapacitet pločastog kondenzatora (sl. 1.2.1) iznosi:

$$C=\varepsilon_r\cdot\varepsilon_0\frac{S}{l}\ [\text{F}] \qquad (1.2.1)$$




Sl. 1.2.1




Sl. 1.2.2

gde su:

$C$ [F] — kapacitet pločastog kondenzatora,
$S$ [m²] — površina ploča,
$l$ [m] — razdaljina ploča.

Kapacitet kondenzatora koji se sastoji od »$n$« ploča (sl. 1.2.2) iznosi:

$$C=(n-1)\frac{\varepsilon_r\cdot\varepsilon_0\cdot S}{l}\ [\text{F}] \qquad (1.2.2)$$

### 1.2.2. **Primeri**

**1. primer:** Izračunati kapacitet pločastog kondenzatora čije elektrode imaju površinu $S=120\ \text{cm}^2$ a razmak 0,5 cm, ako je dielektrik staklo ($\varepsilon_r=7$), odnosno ako je ulje ($\varepsilon_r=2{,}5$).

R e š e n j e: Kondenzator sa staklom ima kapacitet:

$$C=\varepsilon_r\cdot\varepsilon_0\frac{S}{l}=7\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\frac{120\cdot 10^{-4}}{0{,}5\cdot 10^{-2}}=1{,}485\cdot 10^{-10}\,F=$$
$$=0{,}1485\ \text{nF}=148{,}5\ \text{pF}$$

Kondenzator sa uljem ima kapacitet:

$$C = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \frac{S}{l} = 2,5 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{120 \cdot 10^{-4}}{0,5 \cdot 10^{-2}} = 55 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F} =$$

$$= 0,055\,\mathrm{nF} = 55\,\mathrm{pF}$$

**2. primer:** Koliki je kapacitet vazdušnog kondenzatora za radio-prijemnike, koji se sastoji od dvadeset ploča ($n = 20$) površine $S = 20\,\mathrm{cm}^2$, ako je rastojanje među pločama 0,06 cm (sl. 1.2.2)?

Rešenje: Kapacitet iznosi:

$$C = (n-1)\frac{\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot S}{l} = (20-1)\frac{1 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 20 \cdot 10^{-4}}{0,06 \cdot 10^{-2}} =$$

$$= 5,6 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{F} = 0,56\,\mathrm{nF} = 560\,\mathrm{pF}$$

### 1.2.3. Zadaci za samostalno rešavanje

1. Koliki kapacitet ima kondenzator sa deset ploča, površine $S = 20\,\mathrm{cm}^2$, ako je dielektrik porculan ($\varepsilon_r = 6$), debljine 0,1 mm?

2. Kolika treba da je debljina dielektrika od parafina ($\varepsilon_r = 3,6$) da bi kondenzator, čije su površine $35 \times 700$ mm, imao kapacitet $C = 316,8\,\mu\mathrm{F}$?

3. Između elektroda pločastog kondenzatora, čije su površine $1\,\mathrm{m}^2$, održava se stalna potencijalna razlika od 5 kV. Izračunati količinu elektriciteta $Q$ ako je razmak elektroda 5 mm.

4. Električni tovar pločastog kondenzatora sa vazduhom kao dielektrikom iznosi $10\,\mu\mathrm{C}$. Površine elektroda su $S = 1\,\mathrm{m}^2$. Kolika je potencijalna razlika između elektrode pri njihovom rastojanju od 10 mm?

5. Kondenzator u praznom sudu (vazduh $\varepsilon_r = 1$) ima kapacitet $C = 4\,\mathrm{nF}$. Koliki će biti kapacitet kada se u sud nalije transformatorsko ulje ($\varepsilon_r = 2,5$)?

6. Pločasti kondenzator priključen je na napon $U = 700$ V. Dielektrik je vazduh. Pri kojem će razmaku elektroda vazduh biti probijen, ako je probojna čvrstoća vazduha 22 kV/cm?

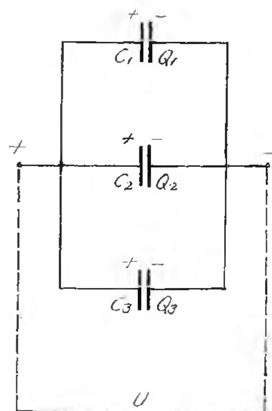
## 1.3. VEZIVANJE KONDENZATORA U GRUPE

### 1.3.1. **Osnovni pojmovi i formule**

Vezivanjem više kondenzatora u grupe može se kapacitet grupe povećati ili smanjiti. Vezivanje može biti: paralelno, redno i mešovito.

a) **Paralelna veza**

Kod ove veze (sl. 1.3.1) svaki od kondenzatora priključen je na isti napon $U$, pa će njihovi električni tovari biti:



Sl. 1.3.1

$$Q_1 = C_1 \cdot U,\ Q_2 = C_2 \cdot U,\ Q_3 = C_3 \cdot U$$

a ukupni tovar grupe:

$$Q = C \cdot U = Q_1 + Q_2 + Q_3 = C_1 \cdot U + C_2 \cdot U + C_3 \cdot U = (C_1 + C_2 + C_3) \cdot U$$

ili nakon skraćivanja sa $U$:

$$C = C_1 + C_2 + C_3 \qquad (1.3.1)$$

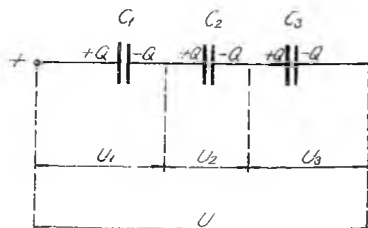
Kapacitet grupe paralelno vezanih kondenzatora jednak je zbiru kapaciteta pojedinih kondenzatora.

Ako je $C_1 = C_2 = C_3 = C_n$ i ako u kolu postoji $n$ kondenzatora, tada je:

$$C = n \cdot C_n \qquad (1.3.2)$$

b) **Redna veza**

Kod ove veze (sl. 1.3.2) količine elektriciteta na pločama grupe su iste:



Sl. 1.3.2

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$$

Napon svakog kondenzatora je:

$$U_1 = \frac{Q}{C_1},\ U_2 = \frac{Q}{C_2} \text{ i } U_3 = \frac{Q}{C_3}$$

a ukupni napon:

$$U = \frac{Q}{C} = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3}$$

ili posle skraćivanja sa $Q$:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \qquad (1.3.3)$$

Recipročna vrednost kapaciteta grupe na red vezanih kondenzatora jednaka je zbiru recipročnih vrednosti kapaciteta pojedinih kondenzatora.

Za grupu od dva kondenzatora može se gornji izraz preurediti u obliku:

$$C = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \qquad (1.3.4)$$

koji dopušta da se $C$ izračunava neposredno, a ne preko izraza (1.3.3).

Ako je $C_1 = C_2 = C_3 = C_n$ i ako u kolu postoji $n$ kondenzatora, tada je

$$C = \frac{C_n}{n} \qquad (1.3.5)$$

Energija električnog polja u kondenzatoru iznosi:

$$W_e = \frac{C \cdot U^2}{2} = \frac{Q^2}{2 \cdot C} = \frac{Q \cdot U}{2} \text{ [J]} \qquad (1.3.6)$$

### 1.2.3. **Primeri**

**1. primer:** Tri kondenzatora kapaciteta $Q_1 = 2\,\mu\text{F}$, $C_2 = 1\,\mu\text{F}$ i $C_3 = 4\,\mu\text{F}$ vezana su najpre redno, a zatim paralelno. Koliki je ukupni kapacitet grupe u oba slučaja?

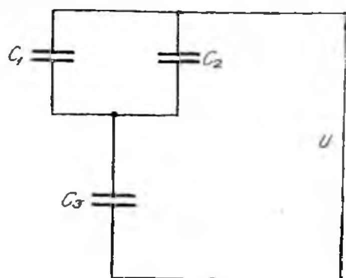
Rešenje: Ukupni kapacitet pri rednom spoju iznosi:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}, \quad C = \frac{4}{7} = 0{,}57\ \mu\text{F}$$

Ukupni kapacitet pri paralelnom spoju iznosi:

$C = C_1 + C_2 + C_3 = 2 + 1 + 4 = 7\ \mu F$

**2. primer:** Odrediti ukupni kapacitet grupe kondenzatora kapaciteta: $C_1 = 2\ \mu F$, $C_2 = 1\ \mu F$, $C_3 = 4\ \mu F$, spojenih mešovito prema sl. 1.3.3.




**Sl. 1.3.3**

Rešenje: Ukupni kapacitet paralelno spojenih kondenzatora $C_1$ i $C_2$ iznosi

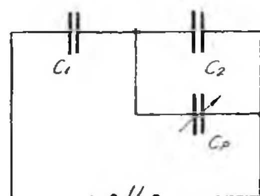
$$C_{1-2} = C_1 + C_2 = 2 + 1 = 3\ \mu F$$

Kapaciteti $C_{1-2}$ i $C_3$ spojeni su redno:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_{1-2}} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12},$$

$$C = \frac{12}{7} = 1{,}71\ \mu F$$

**3. primer:** Kondenzator promenljivog kapaciteta $C_p = 10 \div 500$ pF uključen je u kolo (sl. 1.3.4) gde je $C_1 = 675$ pF i $C_2 = 40$ pF.




**Sl. 1.3.4**

Izračunati oblast promene ukupnog kapaciteta spoja.

Rešenje: U razmatranom slučaju spoja kondenzatora menja se samo kapacitet $C_p$ od minimalne vrednosti $C_{p\,min} = 10$ pF do maksimalne $C_{p\,max} = 500$ pF. Prema tome ukupni kapacitet paralelnog spoja kondenzatora $C_2$ i $C_p$ menja se od:

$$C'_{min} = C_2 + C_{p,\ min} = 40 + 10 = 50 \text{ pF do}$$

$$C'_{max} = C_2 + C_{p\ max} = 40 + 500 = 540 \text{ pF}.$$

Zamenivši paralelni spoj kapaciteta $C_2$ i $C_p$ jednim kapacitetom $C'$, spojenim redno sa kapacitetom $C_1$, odredimo ukupni kapacitet spoja $C$, koji se menja u intervalu od:

$$C_{min} = \frac{C_1 \cdot C'_{min}}{C_1 + C'_{min}} = \frac{675 \cdot 50}{675 + 50} = 46{,}5 \text{ pF do}$$

$$C_{max} = \frac{C_1 \cdot C'_{max}}{C_1 + C'_{max}} = \frac{675 \cdot 540}{675 + 540} = 300 \text{ pF}$$

**4. primer:** Odrediti kapacitete $C_1$ i $C_2$ iz prethodnog primera, ako su zadani kapaciteti $C_p$ i $C$.

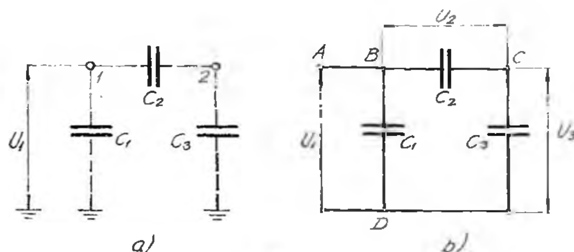
Rešenje: Iz jednačine za ukupne kapacitete:

$$C_{min} = \frac{C_1 \cdot (C_2 + C_{p \cdot min})}{C_1 + C_2 + C_{p \cdot min}} \quad i \quad C_{max} = \frac{C_1 \cdot (C_2 + C_{p \cdot max})}{C_1 + C_2 + C_{p \cdot max}}$$

možemo odrediti nepoznate $C_1$ i $C_2$ pri zadatim ostalim kapacitetima.

**5. primer:** Homogeni vod električne mreže napona 500 V prema zemlji (zemlja služi kao povratni vod) ima kapacitet 2000 pF/km. Paralelno sa električnim vodom postavljena je i linija telefonske veze čiji kapacitet prema zemlji iznosi 1000 pF/km. Kapacitet između voda i linije iznosi 10 pF/km. Izračunati napon između linije veze i zemlje, koji nastaje kao rezultat kapacitivne veze između voda električne mreže i linije telefonske veze.

Rešenje: Na sl. 1.3.5a prikazan je vod električne mreže 1, vod linije telefonske veze 2, njihovi kapaciteti prema zemlji $C_1$ i $C_3$, i kapacitet između vodova $C_2$. Na sl. 1.3.5b data je ekvivalentna šema, gde je $U_3$ traženi napon.




Sl. 1.3.5

Za kondenzatore $C_2$ i $C_3$ ukupni kapacitet iznosi:

$$C_{2-3} = \frac{C_2 \cdot C_3}{C_2 + C_2}$$

Pošto su pri rednom spoju kondenzatora njihovi električni tovari isti, to je $Q_2 = Q_3$.

Takođe je:

$$Q_2 = Q_3 = Q_{2-3} = U_1 \cdot C_{2-3} = U_1 \frac{C_2 \cdot C_3}{C_2 + C_3}$$

odakle dobijamo:

$$\frac{Q_3}{C_3} = U_1 \cdot \frac{C_2}{C_2 + C_3}$$

Pošto je:

$\frac{Q_3}{C_3} = U_3$, sledi:

$$U_3 = U_1 \frac{C_3}{C_2 + C_3} = 500 \frac{10}{10 + 1000} = 5 \text{ V}$$

**6. primer:** Šta bi pokazao kulonmetar (instrument za merenje količine elektriciteta), ako bi bio uključen u granu *AB* ekvivalentne šeme iz prethodnog zadatka (sl. 1.3.5b)? Uzmimo da u početku izvor napona $U_1$ nije bio uključen, tako da kapaciteti $C_1$, $C_2$ i $C_3$ nisu bili napunjeni. U tom slučaju, posle uključenja izvora sa naponom $U_1$, kroz kulonmetar proteći će ukupni tovar dveju grana *AD* i *BCD*. Za granu *BD* tovar iznosi:

$$Q_1 = U_1 \cdot C_1 = 500 \cdot 2000 \cdot 10^{-12} = 10^{-6} \text{ C}$$

Za granu *BCD* tovar iznosi:

$$Q_{2-3} = Q_3 = U_3 \cdot C_3 = 5 \cdot 1000 \cdot 10^{-12} = 0{,}5 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

Ukupni tovar iznosi:

$$Q = Q_1 + Q_{2-3} = 10^{-6} + 0{,}5 \cdot 10^{-8} = 100{,}5 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

### 1.3.3. Zadaci za samostalno rešavanje

1. Tri kondenzatora, kapaciteta $C_1 = 7$ pF, $C_2 = 2\,\mu$F i $C_3 = 12\,\mu$F, vezani su paralelno. Koliki je kapacitet grupe?

2. Koliki je ukupni kapacitet grupe kondenzatora, kapaciteta: $C_1 = 100$ pF, $C_2 = 300$ pF, $C_3 = 500$ pF, $C_4 = 1000$ pF i $C_5 = 3000$ pF, pri rednom i paralelnom spoju?

3. Imamo četiri jednaka kondenzatora kapaciteta $C_1 = 2\,\mu$F. Koliki je kapacitet grupe kada se vežu paralelno, a koliki kada se vežu na red?

4. Koliki treba da je ukupni kapacitet kondenzatora $C_1$ koji je spojen paralelno s kondenzatorom $C_2 = 4\ \mu F$, ako je ukupni kapacitet $C = 6\ \mu F$?

5. Izračunati energiju električnog polja pet kondenzatora kapaciteta $C = 20\ \mu F$ pri rednom i paralelnom spoju. Kondenzatori su priključeni na mrežu napona $U = 120$ V.

6. Kondenzatori čiji kapaciteti iznose: $C_1 = 900$ pF $\pm$ 10% i $C_2 = 200$ pF $\pm$ 5% spojeni su paralelno. Izračunati maksimalnu i minimalnu vrednost ukupnog kapaciteta spoja, uzimajući u obzir greške vrednosti kapaciteta.

7. Dva redno spojena kondenzatora $C_1 = 5\ \mu F$ i $C_2 = 0{,}5\ \mu F$ priključena su na napon $U = 220$ V. Odrediti tovar kondenzatora $Q$ i napone $U_1$ i $U_2$ između njihovih elektroda.

8. Dva kondenzatora kapaciteta $C_1 = 600$ pF i $C_2 = 400$ pF vezana su redno. Koliki je ukupni kapacitet?

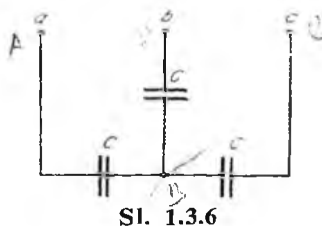
9. Tri kondenzatora, kapaciteta $C_1 = 2\ \mu F$, $C_2 = 4\ \mu F$ i $C_3 = 5\ \mu F$ vezana su redno. Koliko je ukupni kapacitet?

10. Tri kondenzatora, kapaciteta $C_1 = 3\ \mu F$, $C_2 = 2\ \mu F$ i $C_3 = 6\ \mu F$, vezana su redno i stavljena pod napon $U = 600$ V. Koliki su delimični naponi?

11. Dva kondenzatora, kapaciteta $C_1 = 3\ \mu$, $C_2 = 7\ \mu F$, izrađena su za napon $U_1 = U_2 = 100$ V, vezana su redno na napon U = 200 V. Izračunati kapacitet grupe i delimične napone.

12. Tri kondenzatora, kapaciteta $C_1 = 200$ pF, $C_2 = 15\ \mu F$ i $C_3 = 20\ \mu F$, spojena su redno i uključena u kolo napona $U = 200$ V. Odrediti veličinu struje u momentu punjenja kondenzatora, ako je $t = 0{,}01$ s.

13. Tri kondenzatora, kapaciteta po $0{,}25\ \mu F$, spojena su prema šemi na sl. 1.3.6. Odrediti kapacitet kondenzatora i energiju kondenzatora pri priključenju napona $U = 400$ V, redom na stezaljke: *a—b, b—c, a—c, ab—c, ac—b bc—a.*

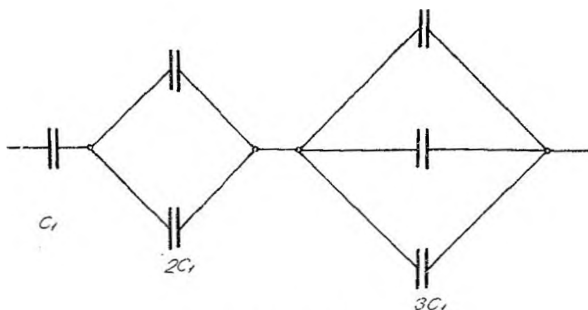


Sl. 1.3.6

14. Dva kondenzatora, kapaciteta $C_1 = 10\ \mu F$ i $C_2 = 5\ \mu F$, spojena su redno i uključena na mrežu $U = 150$ V. Odrediti ukupni kapacitet, napon na svakom kondenzatoru i energiju električnog polja u svakom od njih.

15. Dva kondenzatora, kapaciteta $C_1 = 4\,\mu F$ i $C_2 = 5\,\mu F$, vezana su paralelno, a sa njima na red i treći kondenzator kapaciteta $C_3 = 11\,\mu F$. Ceo niz nalazi se pod naponom $U = 220$ V. Izračunati kapacitet cele grupe, delimične napone i električne tovare svakog kondenzatora.

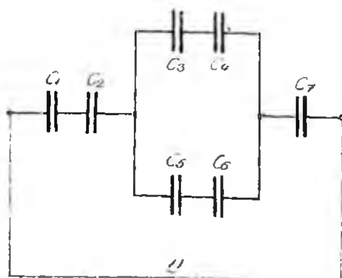
16. Izračunati sve kapacitete koje možemo dobiti pomoću tri kondenzatora kapaciteta: $C_1 = 3\,\mu F$, $C_2 = C_3 = 2\,\mu F$.



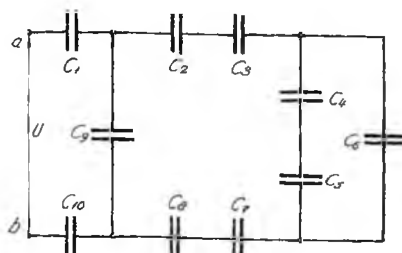

Sl. 1.3.7

17. Šest kondenzatora, kapaciteta $C_1 = 1\,\mu F$, vezana su prema šemi na sl. 1.3.7. Odrediti ukupni kapacitet.

18. Sedam kondenzatora kapaciteta: $C_1 = C_2 = C_7 = 3\,\mu F$, $C_3 = 0{,}5\,\mu F$, $C_4 = 1\,\mu F$, $C_5 = 1\,\mu F$ i $C_6 = 0{,}5\,\mu F$ vezana su prema šemi na sl. 1.3.8. Odrediti ukupni kapacitet.



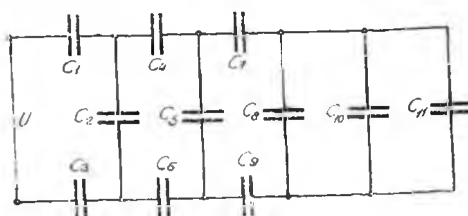

Sl. 1.3.8




Sl. 1.3.9

19. Izračunati kapacitet kondenzatorske baterije (sl. 1.3.9), sastavljene od deset kondenzatora kapaciteta $C_1 = C_{10} = 1000$ pF, $C_2 = C_3 = C_9 = 20$ pF, $C_4 = 100$ pF, $C_5 = 150$ pF i $C_6 = C_7 = C_8 = 40$ pF.

20. Odrediti u svakoj varijanti tabele 1 ukupni kapacitet i energiju električnog polja kola (sl. 1.3.10).

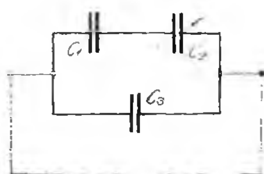



Sl. 1.3.10

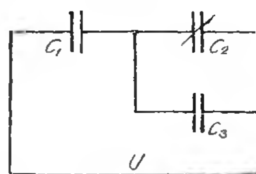
**Tabela 1**

| Veličine | Varijante | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $C_1 - C_3$ [pF] | 1000 | 470 | 0 | 6800 | 1000 | 470 | 6800 | 1000 | 6800 | 0 |
| $C_4 - C_6$ [pF] | 3300 | 6800 | 1000 | 0 | 4700 | 1000 | 4700 | 3300 | 0 | 4700 |
| $C_7 - C_9$ [pF] | 4700 | 1000 | 3300 | 4700 | 0 | 3300 | 3300 | 0 | 470 | 1000 |
| $C_2$ [μF] | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0 | 0,07 | 0,1 | 0,025 | 0,015 |
| $C_5$ [μF] | 0,15 | 0,25 | 0,2 | 0,01 | 0 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,05 | 0,07 |
| $C_8$ [μF] | 0,015 | 0,025 | 0,10 | 0 | 0,07 | 0,06 | 0,04 | 0,15 | 0,25 | 0,20 |
| $C_{10}$ [μF] | 0,02 | 0,03 | — | 0,07 | 0,20 | 0,10 | 0,15 | 0,17 | 0,20 | 0,10 |
| $C_{11}$ [μF] | 0,02 | 0 | 0,10 | 0,02 | 0,20 | 0,15 | 0 | 0,10 | 0 | 0 |
| $U$ [V] | 400 | 600 | 200 | 600 | 400 | 600 | 200 | 400 | 200 | 600 |

21. Odrediti oblast promene ukupnog kapaciteta spoja (sl. 1.3.11), ako je $C_1 = 600$ pF i $C_3 = 26{,}4$ pF. Promenljivi kapacitet $C_2$ menja se u granicama od 30 do 600 pF.




Sl. 1.3.11

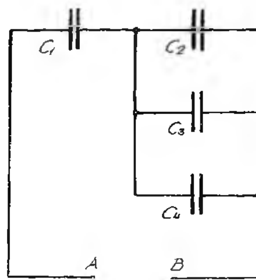



Sl. 1.3.12

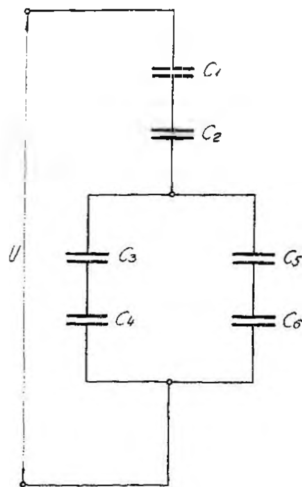
22. U kondenzatoru $C_2$ (sl. 1.3.12) kapacitet se menja u granicama od 15 do 315 pF. Pri kakvim se vrednostima kapaciteta $C_1$ i $C_3$ ukupni kapacitet spoja menja u granicama od 43,7 do 175 pF?

23. Na stezaljke $A$ i $B$ spoja kondenzatora (sl. 1.3.13) priključen je napon $U = 20$ V. Izračunati tovare kondenzatora i njihove napone, ako je $C_1 = 2\ \mu$F, $C_2 = 0{,}5\ \mu$F, $C_3 = 1\ \mu$F, $C_4 = 1{,}5\ \mu$F.

24. Kondenzatori su spojeni po šemi prikazanoj na sl. 1.3.14. Tovar na kondenzatoru $C_5$ jednak je $10^{-4}$ C. Kapaciteti kondenzatora su: $C_1 = 10\ \mu$F, $C_2 = 0{,}5\ \mu$F, $C_3 = 0{,}5\ \mu$F, $C_4 = 5\ \mu$F i $C_5 = C_6 = 1\ \mu$F. Odrediti napon izvora.

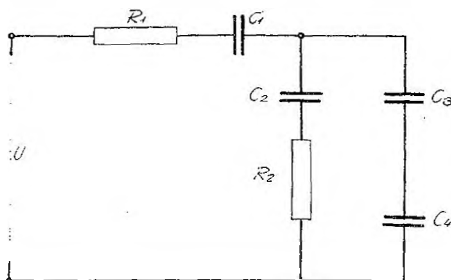


Sl. 1.3.13



Sl. 1.3.14

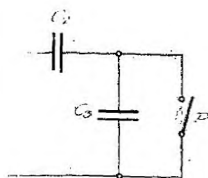
25. Kondenzatori su spojeni po šemi, prikazanoj na sl. 1.3.15 Kapaciteti iznose: $C_1 = 1\ \mu$F, $C_2 = 3\ \mu$F, $C_3 = 6\ \mu$F i $C_4 = 2\ \mu$F. Otpori $R_1$ i $R_2$ imaju proizvoljnu vrednost. Napon izvora je $U = 100$ V. Odrediti tovar svakog kondenzatora i ukupni kapacitet.



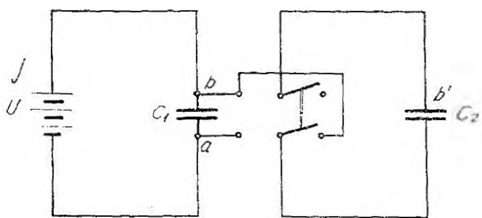
Sl. 1.3.15

26. Data su dva kondenzatora $C_1 = 1\ \mu$F i $C_2 = 10\ \mu$F. Izvor energije daje napon $U = 200$ V. Kondenzatori su spojeni na izvor prvo redno, pa onda paralelno. Odrediti za oba slučaja energiju svakog kondenzatora.

27. Kako će se izmeniti energija celog sistema kondenzatora spojenih po šemi (sl. 1.3.16) posle zatvaranja prekidača $P$, ako je $C_1 = 2\ \mu F$, $C_2 = 4\ \mu F$ i $C_3 = 2\ \mu F$, . . . , i ako napon izvora ostaje isti?



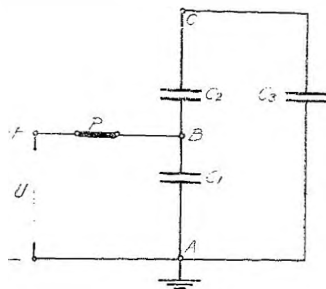
Sl. 1.3.16



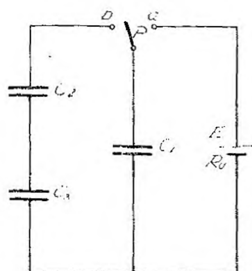

Sl. 1.3.17

28. Kondenzatori $C_1 = 1\ \mu F$, $C_2 = 1\ \mu F$ i izvor napona $U = 300$ V spojeni su prema sl. 1.3.17. Prekidačem se omogućuje izmena šeme spoja kondenzatora. Naći razliku potencijala tačaka $a$ i $b'$ i tovar svakog kondenzatora posle prebacivanja prekidača s levog položaja na desni.

29. Posle zatvaranja prekidača $P$ (sl. 1.3.18) izvor je dao u kolo tovar $4{,}4 \cdot 10^{-5}$ C i kondenzator $C_3$ napunio se do napona 1,2 kV. Naći potencijal tačaka $B$ i $C$, ako je potencijal tačke $A$ jednak nuli. Naći vrednost kapaciteta $C_3$ i $C_2$, ako je $C_1 = 10^4$ pF i $C_2 = 3\ C_3$.




Sl. 1.3.18




Sl. 1.3.19

30. Kondenzator $C_1 = 5\ \mu F$ (sl. 1.3.19) napunio se od izvora čija je ems $E = 24{,}8$ V. Zatim smo prekidač $P$ prebacili u položaj $b$. Izračunati energiju, koju je izvor dao pri punjenju kondenzatora $C_1$, a takođe i napone na svim kondenzatorima, posle prebacivanja prekidača, ako je $C_2 = 2\ \mu F$ i $C_3 = 3\ \mu F$.

31. Odrediti sumu energija svih kondenzatora iz prethodnog zadatka kada se prekidač nalazi u položaju $b$ i uporediti je sa energijom kondenzatora $C_1$ do prebacivanja prekidača.



# 1.4 PRORAČUN KAPACITETA KONDENZATORA

## 1.4.1. Osnovni pojmovi i formule

a. Cilindrični kondenzator (sl. 1.4.1)

$$C=\frac{2\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot l}{\ln\frac{r_2}{r_1}}=\frac{0{,}242\cdot\varepsilon_r\cdot l}{\log\frac{r_2}{r_1}}\,10^{-10}\quad[\mathrm{F}] \tag{1.4.1}$$

gde su:

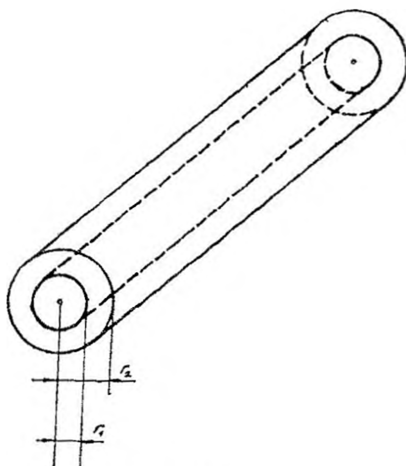
$r_1$ [m] — unutrašnji poluprečnik cilindričnog kondenzatora,
$r_2$ [m] — spoljašnji poluprečnik cilindričnog kondenzatora,
$l$ [m] — dužina cilindričnog kondenzatora.

b. Kuglasti kondenzator sa dve koncentrične kugle (sl. 1.4.2)

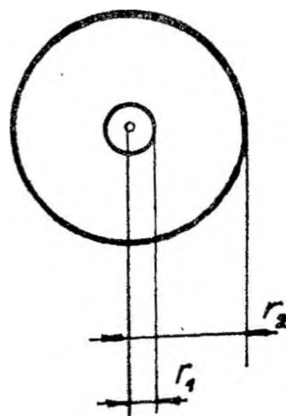
$$C=4\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot\frac{r_1\cdot r_2}{r_2-r_1}\quad[\mathrm{F}] \tag{1.4.2}$$

gde su:

$r_1$ [m] — poluprečnik unutrašnje kugle,
$r_2$ [m] — poluprečnik spoljašnje kugle.



Sl. 1.4.1




Sl. 1.4.2

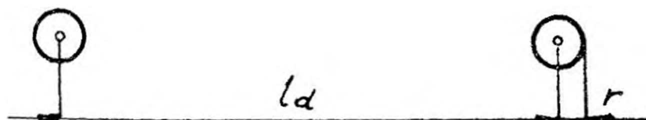
c. Kapacitet u vazduhu slobodne kugle poluprečnika $r$ [m] je

$$C = 4\pi\varepsilon_0 r \qquad (1.4.3)$$

d. Kapacitet koaksijalnog kabla (računa se po formuli 1.4.1)

c. Kapacitet dvaju paralelnih vodiča daleko od zemlje (sl. 1.4.3)

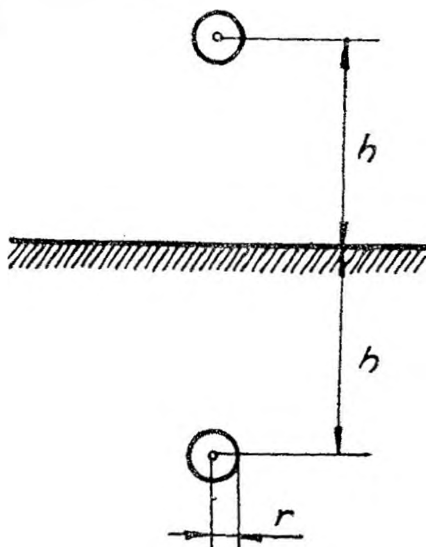
$$C = \frac{\pi \cdot \varepsilon \cdot l}{\ln \frac{l_d}{r}} = \frac{0,121 \cdot \varepsilon_r \cdot l}{\ln \frac{l_d}{r}} 10^{-10} \quad [F] \qquad (1.4.4)$$




Sl. 1.4.3

f. Kapacitet jednog vodiča na visini $h$ iznad zemlje (sl. 1.4.4)

$$C = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot l}{\ln \frac{2h}{r}} = \frac{0,242 \cdot l}{\log \frac{2h}{r}} 10^{-10} \quad [F] \qquad (1.4.5)$$

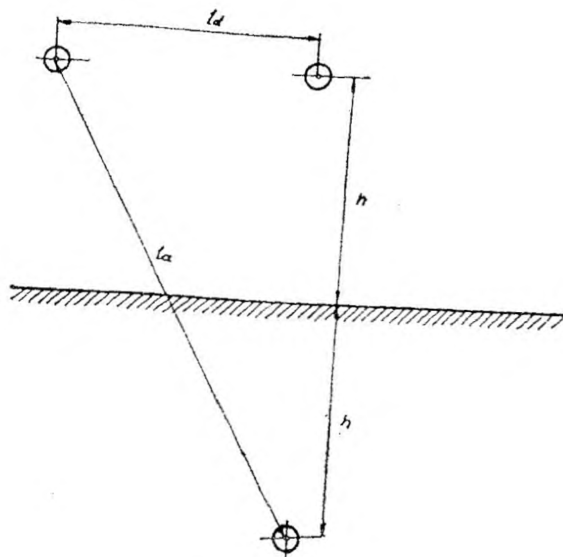



Sl. 1.4.4

g. Kapacitet dva voda koji se nalaze paralelno položeni na visini $h$ iznad zemlje (sl. 1.4.5).

$$C=\frac{\pi\cdot\varepsilon_0\cdot l}{\ln\frac{l_d}{r}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\cdot\pi\cdot\varepsilon_0\cdot l}{\ln\frac{2h}{r}}=\frac{\pi\cdot\varepsilon_0\cdot l}{\ln\left(\frac{l_d}{r}\cdot\frac{2h}{l_a}\right)}=$$

$$=\frac{0,121\cdot l}{\ln\left(\frac{l_d}{r}\cdot\frac{2h}{l_a}\right)}10^{-10}\quad [\mathrm{F}] \qquad (1.4.6)$$




Sl. 1.4.5

## 1.4.2. Primer

**1. primer:** Izračunati kapacitet koaksijalnog kabla čiji su podaci: radijus bakarnog vodiča $r_1 = 2{,}25$ mm, radijus kablovskog omotača $r_2 = 4{,}72$ mm, dužina kabla $l = 1000$ m. Uzeti da je relativna dielektrična konstanta izolacije $\varepsilon_r = 4$.

Rešenje: Prema formuli 1.4.1 imamo:

$$C = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 1000}{\ln \frac{4,72}{2,25}} =$$

$$\frac{220 \cdot 10^{-9}}{0,74} = 300 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{F} = 300\,\mathrm{nF}$$

### 1.4.3. Zadaci za samostalno rešavanje

1. Cilindrični kondenzator izrađen je od keramičkog valjka od sirutita ($\varepsilon_r = 100$). Valjak ima unutrašnji prečnik $d = 2,4$ mm, a njegova je debljina $l_d = 0,1$ mm. Metaliziran je s obe strane a dužina mu je $l = 30,3$ mm. Treba odrediti kapacitet $C$ kondenzatora.

2. Za izradu cilindričnog kondenzatora upotrebljena je cev kerefara ($\varepsilon_r = 64$) unutrašnjeg prečnika $d_1 = 5$ mm, i debljine zidova $l_t = 0,25$ mm. Na kojoj dužini $l$ treba da su obe strane metalizirane da bi se dobio kapacitet $C = 1200$ pF?

3. Koliki kapacitet po kilometru $C_1$ ima jednožilni kabl sa gumenom izolacijom ako mu je prečnik vodiča $r = 3$ mm, a debljina gumene izolacije $l = 3$ mm? Guma ima relativnu dielektričnu konstantu $\varepsilon_r = 2,6$ i probojnu čvrstoću $E_d = 35$ kV. Koliki je maksimalni dopušteni pogonski napon $U_d$ za taj kabl ako se zbog sigurnosti dopušta 2,5 puta slabije polje od $E_d$.

4. Koliki kapacitet ima kugla koja se nalazi u ulju ($\varepsilon_r = 2,5$) poluprečnika $r = 1$ m.

5. Koliki kapacitet ima Zemljina kugla $C$ ako joj je poluprečnik $r = 6380$ km?

6. Telefonski vod poljskog telefona ima prečnik $d = 2$ mm, a nalazi se na $h = 2$ m iznad zemlje. Koliki kapacitet $C$ ima taj vod prema zemlji ako je vod dugačak $l = 2$ km?

7. Dalekovod s dva vodiča preseka $S = 16\,\mathrm{mm}^2$ nalazi se na visokim stubovima tako da mu se kapacitet prema zemlji može zanemariti. Udaljenost među vodičima je $l_d = 2$ m. Treba odrediti kapacitet tog dalekovoda $C$ po kilometru dužine.

8. Vod sa dva vodiča prečnika $d = 2$ mm prolazi na visini $h = 4$ m iznad zemlje, a vodiči su razmaknuti $l = 30$ cm. Ako se taj

vod spusti na visinu $h_1 = 3$ m, koliko treba $(l_1)$ razmaknuti vodiče da kapacitet voda $(C)$ ostane po jedinici dužine isti.

9. Neki vod sa dva vodiča daleko od zemlje, razmaknuti međusobno $l_{s1}$, ima daljinu $l = 100$ m. Na koliki međusobni razmak $l_{s2}$ treba razmaknuti vodiče da bi kod dužine voda $l_2 = 300$ m kapacitet voda $C$ ostao isti.

Rešenja zadataka uz poglavlje 1.4:

1. $C = 2100$ pF
2. 3,22 cm
3. $C = 209{,}8$ nF, $U_p = 29{,}078$ kV
4. 278,2 pF
5. 710 μF
6. 13,3 nF
7. 4,11 nF
8. 34,9 cm
9. $l_{s1} = l_{s2}$

# 2. PRORAČUN OSNOVNIH ELEKTRIČNIH VELIČINA

## 2.1. KOLIČINA ELEKTRICITETA I JAČINA STRUJE

### 2.1.1. Osnovni pojmovi i formule

Broj slobodnih elektrona koji za izvesno vreme prođu kroz prijemnik (npr. kroz sijalicu određene snage da bi ova svetlela određeno vreme) predstavlja količinu elektriciteta (oznaka $Q$) protekllu za to vreme. Količina elektriciteta koja kroz ma koji presek provodnika zatvorenog kola protekne za jedinicu vremena, odnosno za jednu sekundu, naziva se jačina električne struje (oznaka $I$). Prema ovoj definiciji je:

$$I = \frac{Q}{t} \quad \text{ili} \quad Q = I \cdot t \qquad (2.1.1)$$

Jedinica za jačinu električne struje je amper (oznaka A), koja je usvojena kao četvrta osnovna jedinica Đorđijevog sistema MKSA. Sada možemo izvesti jedinicu količine elektriciteta prema obrascu (2.1.1):

$$Q = I \cdot t = [1\,\text{A} \cdot 1\,\text{s} = 1\,\text{As} = 1\,\text{C}]$$

To je, dakle, ampersekunda (As) koja je nazvana kulon (oznaka C).

### 2.1.2. Primeri

**1. primer:** Koliko elektriciteta protekne kroz sijalicu koja svetli 3 h, ako je jačina struje stalna i iznosi 0,18 A?

R e š e n j e: Količina elektriciteta je:

$$Q = I \cdot t = 0{,}18 \cdot 3600 \cdot 3 = 1944\,\text{As} = 1944\,\text{C}$$

**2. primer:** Olovni akumulator kapaciteta 14 Ah puni se strujom $I_p = 1,4$ A. Koliko dugo će se puniti i za koje vreme će se isprazniti kroz sijalicu strujom $I_i = 0,3$ A?

Gubitke ne uzimati u obzir.

Rešenje: Trajanje punjenja iznosi:

$$t = \frac{Q}{I_p} = \frac{14}{1,4} = 10 \text{ h}$$

Trajanje pražnjenja akumulatora kroz sijalicu je:

$$t = \frac{Q}{I_i} = \frac{14}{0,3} = 47 \text{ h}$$

### 2.1.3. Zadaci za samostalno rešavanje

1. Koliko elektriciteta protekne kroz sijalicu koja svetli 1 h ako je struja stalna i iznosi 0,45 A?

2. Kolika je jačina struje ako za 2 h prođe kroz prijemnik količina elektriciteta od 360 C?

3. Koliko će vremena proticati kroz prijemnik količina elektriciteta od 7,5 Ah pri jačini struje od 5 A?

4. Napunjen akumulator ima kapacitet 28 Ah. Kolika je to količina elektriciteta u kulonima?

Kolika je struja neophodna pri punjenju akumulatora za 10 h?

Kolikom strujom bi se on ispraznio za 140 h?

5. Koja količina elektriciteta protekne kroz nit radio-lampe za 1 h pri struji od 120 mA?

## 2.2. PRORAČUN OTPORA PREMA DIMENZIJAMA PROVODNIKA. UTICAJ TEMPERATURE NA OTPOR PROVODNIKA

### 2.2.1. Osnovni pojmovi i formule

Električni otpor je svojstvo provodnika da se odupire proticanju električne struje i zavisi od materijala i dimenzija provodnika. Električni otpor provodnika je, dakle, fizička veličina koja karakteriše materijale u pogledu provođenja električne struje i ima

stalnu vrednost za određeni materijal ukoliko se druge fizičke osobine ne menjaju (temperatura i dr.). Električni otpor računamo po izrazu:

$$R = \frac{\rho \cdot l}{S} = \frac{l}{\gamma \cdot S} [\Omega] \tag{2.2.1}$$

gde su

$l$ [m] — dužina provodnika,

$S$ [mm²] površina poprečnog preseka provodnika,

$\rho \left[\frac{\Omega \, \text{mm}^2}{\text{m}}\right]$ — specifični otpor materijala provodnika,

$\gamma = \frac{1}{\varrho} \left[\frac{\text{m}}{\Omega \cdot \text{mm}^2}\right]$ — specifična provodnost materijala provodnika.

Električni otpor provodnika kružnog preseka, prečnika $d$ iznosi:

$$R = \frac{\varrho \cdot l}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{\varrho \cdot l}{0{,}785\, d^2} = 1{,}273 \frac{\varrho \cdot l}{d^2} = 1{,}273 \frac{l}{\gamma \cdot d^2} \tag{2.2.2}$$

a prečnik provodnika:

$$d = \sqrt{\frac{1{,}273 \varrho \cdot l}{R}} \text{ [mm]} \tag{2.2.3}$$

Električni otpor cevastog provodnika spoljašnjeg prečnika $d_1$ i unutrašnjeg prečnika $d_2$ je:

$$R = \frac{\varrho \cdot l}{\frac{\pi \cdot d_1^2}{4} - \frac{\pi d_2^2}{4}} = \frac{\varrho \cdot l}{0{,}785 (d_1^2 - d_2^2)} =$$

$$= 1{,}273 \frac{\varrho \cdot l}{d_1^2 - d_2^2} = 1{,}273 \frac{l}{\gamma (d_1^2 - d_2^2)} [\Omega] \tag{2.2.4}$$

Električni otpor pravougaone šine, visine $b$ i širine $a$, iznosi:

$$R = \frac{\varrho \cdot l}{a \cdot b} = \frac{l}{\gamma \cdot a \cdot b} [\Omega] \tag{2.2.5}$$

Električni otpor elektrolita i uglja koji su provodnici drugog reda iznosi:

$$R = \frac{\varrho \cdot l}{S} = \frac{l}{\gamma \cdot S} [\Omega]. \qquad (2.2.6)$$

gde su:

$l$ [cm] — rastojanje između elektroda,

$S$ [cm$^2$] — površina elektroda,

[$\Omega$ cm] — specifična provodnost elektrolita.

Promena otpora provodnika u zavisnosti od temperature data je obrascem:

$$R_2 = R_1 + R_1 \cdot a (t_2 - t_1) = R_1 [1 + a (t_2 - t_1)] =$$
$$= R_1 (1 + a \Delta t) \qquad (2.2.7)$$

gde su:

$R_1$ [$\Omega$] — otpor pri temperaturi $t_1$ [°C],

$R_2$ [$\Omega$] — otpor pri temperaturi $t_2$ [°C],

$a \left[\frac{1}{°C}\right]$ — temperaturni koeficijent.

### 2.2.2. Primeri

**1. primer:** Izračunati otpor bakarnog provodnika prečnika $d = 1{,}8$ mm i dužine 1 km.

Rešenje: Presek provodnika je:

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = 0{,}785 \cdot 1{,}8^2 = 2{,}5 \text{ mm}^2$$

Otpor provodnika iznosi:

$$R = \frac{\varrho \cdot l}{S} = \frac{0{,}0175 \cdot 1000}{2{,}5} = 7 \, \Omega$$

**2. primer:** Otpor spirale električnog lemila je $R = 24 \, \Omega$. Kolika je dužina žice od nihroma, ako je prečnik $d = 0{,}25$ mm?

Rešenje: Uzevši da je $\varrho = \frac{1{,}2 \, \Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$ dobijamo

$$l = \frac{R \cdot d^2}{1{,}273 \cdot \varrho} = \frac{24 \cdot 0{,}25^2}{1{,}273 \cdot 1{,}2} \approx 1 \text{ m}$$

**3. primer:** Izračunati otpor žičanog reostata s kliznim kontaktom, napravljenog od nikelina prečnika $d = 0,5$ mm. Žica je namotana zbijeno u jedan sloj na keramički cilindar prečnika $D = 6$ cm i dužine $l = 25$ cm.

R e š e n j e : Dužina zavojnice je :

$$l_1 = \pi \cdot D = 3,14 \cdot 0,06 = 0,1884 \text{ m}$$

Broj zavojnice je:

$$N = \frac{l}{d} = \frac{250}{0,5} = 500$$

Dužina žice iznosi:

$$l = N \cdot l_1 = 500 \cdot 0,1884 = 94 \text{ m}$$

Presek žice je:

$$S = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = \frac{0,5^2 \cdot 3,14}{4} = 0,196 \text{ mm}^2$$

Otpor reostata, uzimajući da je $\varrho = 0,42 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$ iznosi:

$$R = \frac{\varrho \cdot l}{S} = \frac{0,42 \cdot 94}{0,196} = 40 \ \Omega$$

**4. primer:** Izračunati otpor dvostruke telefonske nadzemne linije dužine $l = 10$ km pri temperaturi $t_2 = -20$ °C. Provodnici su čelični, prečnika $d = 4$mm.

R e š e n j e: Otpor linije pri temperaturi $t_1 = 20$ °C i $\varrho = 0,17 \left[\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}\right]$ je

$$R_1 = \frac{2 \cdot l \cdot \varrho}{S} = \frac{2 \cdot 10\,000 \cdot 0,17}{\frac{4^2 \cdot \pi}{4}} = 275 \ \Omega$$

Otpor linije pri temperaturi $t_2 = -20\,°C$ i $a = 0{,}005\,°C^{-1}$ iznosi:

$$R_2 = R_1 [1 + a(t_2 - t_1)] = 275 [1 + 0{,}005 (-20 - 20)] = 220\ \Omega$$

**5. primer:** Izračunati otpor tečnog reostata, koji se sastoji od dve metalne ploče dimenzija $0{,}2 \cdot 0{,}4\ m^2$, uronjenih u 5% rastvor sode na rastojanju 0,18 m (sl. 2.2.1).

Rešenje: Površina ploča je:

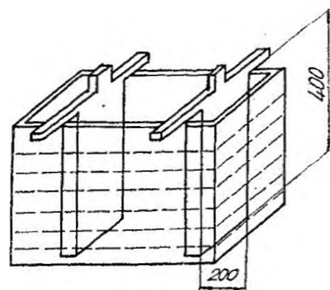
$$S = 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08\ m^2$$

Uzimajući da je

$$\gamma = 0{,}045\ 1/\Omega \cdot cm = 4{,}5\ 1/\Omega \cdot m$$

dobijamo:

$$R = \frac{l}{\gamma \cdot S} = \frac{0{,}18}{4{,}5 \cdot 0{,}08}\ 0{,}5\ \Omega$$




Sl. 2.2.1

### 2.2.3. Zadaci za samostalno rešavanje

1. Odrediti otpor aluminijske šine čije su dimenzije: visina 0,12 m, širina 0,01 m i dužina 10 m.

2. Prenos električne energije vrši se aluminijskim provodnicima kružnog preseka. Izračunati otpor provodnika ako je specifični otpor $\varrho = 0{,}0295 \frac{\Omega \cdot mm^2}{m}$. Prečnik i dužina provodnika za razne varijante dati su u tabeli 2.

**Tabela 2**

| Veličina | Varijante | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $d$ [mm] | 2,10 | 5,20 | 3,80 | 4,50 | 1,95 | 4,10 | 3,05 | 2,44 | 1,88 | 4,80 |
| $l$ [m] | 100 | 50 | 25 | 30 | 60 | 40 | 20 | 70 | 150 | 85 |

3. Odrediti otpor aluminijske šine pravougaonog preseka (tabela 3). Specifična provodnost aluminijuma je $\gamma = 34\ \mathrm{m/\Omega \cdot mm^2}$, širina šine $a$, visina $b$, dužina $l$.

**Tabela 3**

| Veličina | Varijante | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $a$ [mm] | 2,10 | 3,05 | 2,44 | 3,50 | 3,98 | 2,26 | 2,71 | 4,10 | 5,10 | 4,40 |
| $b$ [mm] | 4,10 | 10,80 | 5,10 | 7,35 | 4,55 | 4,10 | 9,05 | 10,8 | 10,8 | 8,6 |
| $l$ [m] | 20 | 40 | 35 | 50 | 100 | 80 | 45 | 52 | 120 | 75 |

4. Odrediti u svakoj varijanti tabele 4 za bakarne i aluminijske provodnike nepoznate veličine ako je $\varrho = 0{,}018 \dfrac{\Omega \cdot \mathrm{mm^2}}{\mathrm{m}}$ (za bakar) i $\varrho = 0{,}0295 \dfrac{\Omega \cdot \mathrm{mm^2}}{\mathrm{m}}$ (za aluminijum). Izračunati otpor.

**Tabela 4**

| Veličine | Varijante | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| | Al | Cu | Cu | Al | Al | Cu | Cu | Al | Al | Cu |
| $d$ [mm] | 0,1 | 0,25 | .... | .... | 0,2 | .... | 0,4 | .... | 0,15 | 0,25 |
| $S$ [mm²] | .... | .... | 0,196 | 0,07 | .... | 0,0177 | .... | 0,785 | .... | .... |
| $l$ [m] | 10 | 5 | 25 | 30 | 50 | 45 | 100 | 150 | 15 | 20 |

5. Dvostruka linija dužine $l = 1{,}5$ km, izrađena je od čeličnog provodnika, koji se sastoji od dvanaest žica prečnika $d = 2{,}3$ mm. Odrediti presek provodnika i otpor linije, ako je specifični otpor čeličnih provodnika $\varrho = 0{,}14 \dfrac{\Omega \cdot \mathrm{mm^2}}{\mathrm{m}}$.

6. Provodnik je izrađen od čelične šine kružnog preseka čiji je prečnik $d = 10$ mm. Izračunati presek šine i njen otpor pri dužini $l = 10$ m.

7. Izračunati otpor bakarnog provodnika preseka $S = 2{,}5\ \mathrm{mm}^2$ dužine $l = 40$ m.

8. Izračunati otpor jednožilnog kabla koji se sastoji od 37 bakarnih žica. Presek svake žice je $S = 0{,}946\ \mathrm{mm}^2$, a dužina $l = 200$ m

9. Sijalica je udaljena od izvora 30 m i vezana bakarnim žicama preseka $S = 1{,}5\ \mathrm{mm}^2$. Koliki je otpor žice?

10. Imamo komad žice za koji smo merenjem našli: $l = 30$ m, $d = 2{,}785$ mm i $R = 0{,}14\ \Omega$. Od kakvog je materijala ova žica?

11. Bakarnu žicu dužine $l = 1000$ m i preseka $S = 6\ \mathrm{mm}^2$ treba zameniti isto tako dugom žicom od aluminijuma ali da ima isti otpor. Koliki mora da bude presek ove žice od aluminijuma?

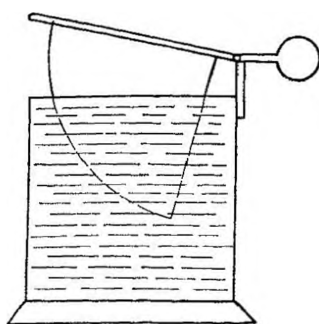
12. Spirala za električno lemilo napravljena je od nihroma prečnika $d = 0{,}4$ mm, dužine $l = 4{,}57$ m. Izračunati njen otpor.

13. Linija elektroprenosa jednosmernom strujom napona 800.000 V izrađena je od alučeličnog provodnika preseka $S = 580\ \mathrm{mm}^2$. Dužina linije je $l = 470$ km. Koliki otpor ima linija?

14. Dužina provodnika namotanog na kalemu je $l = 300$ m. Njegov otpor $R_1 = 9\ \Omega$. Odrediti dužinu $l_2$ toga provodnika (istog materijala), ako otpor treba da iznosi $R_2 = 150\ \Omega$.

15. Alučelični provodnik sastoji se od 18 aluminijumskih žica prečnika $d_{Al} = 3{,}7$ mm i sedam čeličnih žica prečnika $d_{Fe} = 3{,}2$ mm. Izračunati prečnik i otpor žica ako je njihova dužina 10 km.

16. Tečni reostat u obliku noža (sl. 2.2.2) uronjen je u 15% rastvor soli. Radna površina noža je $S = 0{,}1\ \mathrm{m}^2$. Rastojanje od strane posude do noža je $l = 0{,}1$ m. Izračunati otpor reostata pri potpunom uronjavanju noža $\left(\text{uzeti } \gamma = 16{,}4 \dfrac{1}{\Omega \cdot \mathrm{m}}\right)$.



Sl. 2.2.2

17. Na koje rastojanje treba postaviti ploče tečnog reostata (sl. 2.2.1) uronjene u 5% rastvor sode da bi otpor tečnog otpornika iznosio $R = 5\ \Omega$? Dimenzije ploče su $0{,}1 \times 0{,}15$ m.

18. Koliki je otpor bakarne cevi dužine $l = 30$ m, unutrašnjeg prečnika $d_2 = 40$ mm i debljine zida $\delta = 5$ mm.

19. Odrediti otpor rastvora sumporne kiseline ($H_2SO_4$) pri temperaturi $t_2 = 40$ °C, ako pri temperaturi $t_1 = 20$ °C iznosi $R_1 = 0,5\ \Omega$. Uzeti da je $a = -0,015 \frac{1}{°C}$.

20. Namotaj električnog motora izrađen je od bakarnih provodnika. Njegov otpor pre početka rada je $R_1 = 0,18\ \Omega$ (pri $t_1 = 20$ °C), a pri završetku rada $R_2 = 0,2\ \Omega$. Do koje se temperature zagrejao namotaj?

21. Otpor volframove niti ($a = 0,005$) sijalice je $R_1 = 0,6\ \Omega$ pri $t_1$ 15 °C. Do koje se temperature $t_2$ zagreje nit ako se njen otpor poveća do $R_2 = 7,3\ \Omega$?

22. Izračunati otpore $R_1$ i $R_2$ namotaja pri temperaturama $t_1 = 0$ °C i $t_2 = 40$ °C ako je namotaj napravljen od bakarnog provodnika, a pri $t = 20$ °C njegov je otpor $R = 1700\ \Omega$.

23. Namotaj generatora jednosmerne struje izveden je bakarnim provodnikom, čiji je otpor $R_1 = 0,02\ \Omega$ pri temperaturi $t_1 = 293$ K. Odrediti njegovu temperature, ako se otpor poveća na $R_2 = 0,0236\ \Omega$.

24. Otpor volframove žice pri temperaturi $t_1 = -20$ °C iznosi $R_1 = 5\ \Omega$. Izračunati njegov otpor pri $t_2 = 0$ °C.

25. Otpor tečnog reostata, koji se sastoji od dve ploče uronjene u 5% rastvor sode, je $R_1 = 0,5\ \Omega$ pri temperaturi $t_1 = 18$ °C. Odrediti njegov otpor pri temperaturi $t_2 = 38$ °C.

26. Izračunati u svakoj varijanti tabele 5 nepoznate veličine i materijal provodnika.

**Tabela 5**

| Veličine | Varijante | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $t_1$ [°C] | 20 | 20 | 16 | 12 | —10 | 10 | 35 | —25 | —30 | 25 |
| $t_2$ [°C] | 70 | 1240 | .... | .... | 0 | .... | 0 | 0,000[illegible] | —5 | 80 |
| $\alpha \left[\frac{1}{°C}\right]$ | 0,004 | 0,0046 | 0,004 | 0,004 | 0,005 | 0,004 | 0,0002 | .... | 0,005 | $5 \cdot 10^{-6}$ |
| $R_1$ [Ω] | .... | 45 | 16 | 0,16 | .... | 5,4 | 42,46 | 8,46 | .... | 17,3 |
| $R_2$ [Ω] | 78 | .... | 18 | 0,2 | 4,5 | 6,3 | .... | .... | 5,5 | .... |

## 2.3. PRORAČUN STRUJE I OTPORA PO OMOVOM ZAKONU

### 2.3.1. Osnovni pojmovi i formule

Omov zakon pokazuje zavisnost između električne struje $I$, napona $U$ i otpora $R$. Definisali smo struju i napon, a otpor ćemo definisati pomoću Omovog zakona, koji glasi: električnim otporom naziva se skalarna veličina jednaka odnosu jednosmernog napona na delu električnog kola ($U_{ab}$) i jednosmerne struje ($I$) koja protiče kroz njega pri odsustvu ems na tom delu:

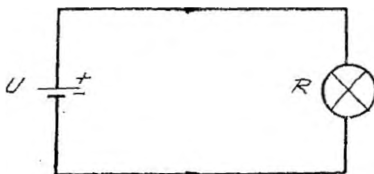
$$R = \frac{U_{ab}}{I} \qquad (2.3.1)$$

Jedinica električnog otpora je:

$$R = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = 1\,\Omega$$

### 2.3.2. Primeri

**1. primer:** Na bateriji napona 4,5 V priključena je sijalica, čija spirala ima otpor 15 Ω. Kolika struja teče kroz sijalicu (sl. 2.3.1).

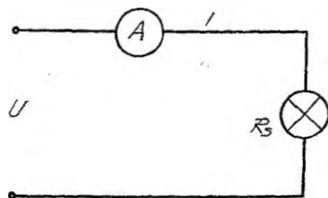



**Sl. 2.3.1**

R e š e n j e: Jačina struje je:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{4{,}5}{15} = 0{,}3\ \mathrm{A}$$

**2. primer:** Redno sa sijalicom uključen je ampermetar. Napon sijalice je 220 V, a snaga joj je nepoznata. Ampermetar pokazuje struju $I = 276$ mA. Koliki je otpor niti sijalice (sl. 2.3.2)?




**Sl. 2.3.2**

R e š e n j e: Otpor niti sijalice iznosi:

$$R_s = \frac{U}{I} = \frac{220}{0{,}276} = 797\,\Omega$$

2.3.3. **Zadaci za samostalno rešavanje**

1. Izračunati količinu elektriciteta, koja prođe kroz poprečni presek provodnika za jednu minutu, ako je njegov otpor $R = 40\ \Omega$ i ako je uključen na mrežu napona $U = 12$ V.

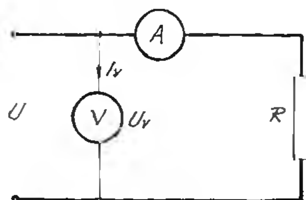
2. Kolika je jačina struje koja teče kroz užarenu nit električne sijalice, čiji je otpor $R = 3200\ \Omega$? Sijalica je uključena na mrežu napona $U = 220$ V.

3. Struja gubitaka kroz izolaciju između dva provodnika je $I = 0{,}02$ mA pri naponu $U = 120$ V. Izračunati veličinu otpora izolacije u megaomima.

4. Spirala grejnog tela treba da bude proračunata za struju $I = 5$ A pri uključenju na mrežu napona $U = 120$ V. Spirala je napravljena od cekasa ($\varrho = 1{,}4$) prečnika $d = 0{,}4$ mm. Odrediti dužinu spirale.

5. Akumulatorska baterija ima u početku napon pražnjenja $U_1 = 1{,}5$ V, a na kraju pražnjenja $U_2 = 0{,}85$ V. Izračunati struju koju daje baterija na početku i na kraju pražnjenja pri priključenju na otpor $R = 20\ \Omega$ i kapacitet baterije pri srednjoj vrednosti struje za 17 h rada.

6. Voltmetar uključen prema sl. 2.3.3 pokazuje napon $U = 20$ V. Izračunati struju koja protiče kroz voltmetar, ako je njegov unutrašnji otpor $R = 1000\ \Omega$.



Sl. 2.3.3

7. Na daljini od 100 m od generatora nalazi se električni motor čija je struja $I = 20$ A. Motor je s generatorom vezan bakarnim provodnicima preseka $S = 10\ \text{mm}^2$. Ako je napon generatora $U_1 = 220$ V, koliki je napon na krajevima motora $U_2$?

8. Koliki bi morali biti preseci dovodnog i odvodnog provodnika iz prethodnog zadatka pa da pad napona iznosi samo 3,8 V?

9. Udaljenost potrošača od električnog izvora iznosi $l = 300$ m, a struja prijemnika iznosi $I = 200$ A. Odrediti presek provodnika od bakra tako da ukupan pad napona ne bude veći od 30 V.

## 2.4. ELEKTRIČNA SNAGA I RAD

### 2.4.1. Osnovni pojmovi i formule

Električna snaga izvora električne energije ili potrošača je:

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R} \text{ [W]} \qquad (2.4.1)$$

Električna i toplotna energija date su izrazom:

$$W = Q = P \cdot t = U \cdot I \cdot t = I^2 \cdot R \cdot t = \frac{U^2}{R} \cdot t \text{ [Ws = J]}$$

a praktične jedinice su:

$$1 \text{ Wh} = 3600 \text{ Ws}; \; 1 \text{ kWh} = 1000 \text{ Wh} = 3{,}6 \cdot 10^6 \text{ Ws} \qquad (2.4.2)$$

Količina toplote, potrebne za grejanje vode, iznosi:

$$Q = m \cdot c\,(t_2 - t_1) \text{ [J]} \qquad (2.4.3)$$

gde su:

$Q$ [J] — količina toplote,
$m$ [l] — količina vode,
$c\left[\frac{\text{J}}{\text{kg °C}}\right]$ — toplotni kapacitet vode $\left(C = 4{,}2 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg °C}}\right)$,
$t_2$ [°C] — temperatura do koje se želi zagrejati voda,
$t_1$ [°C] — početna temperatura vode.

**Napomena:** Količina toplote se direktno računa u vatsekundama, odnosno džulima, umesto u kalorijama radi jednostavnosti pri izradi zadataka.

Stepen iskorišćenja električnih uređaja je:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} \cdot 100 \text{ [\%]}, \qquad (2.4.4)$$

gde su:

$P_2$ [W] — korisna snaga koju daje generator u spoljno kolo i korisna snaga koju razvija motor na osovini,
$P_1$ [W] — snaga koju predaje generatoru pogonski motor i snaga koju motor uzima iz mreže.

### 2.4.2. Primeri

**1. primer:** Električna peć uključena je šest sati dnevno na napon $U = 220$ V. Električna struja peći je $I = 2{,}27$ A. Izračunati njenu snagu, otpor spirale, količinu toplote za jedan dan i cenu električne energije za 30 dana, ako 1 kWh staje 0,25 dinara.

Rešenje: Snaga peći je:

$$P = U \cdot I = 220 \cdot 2{,}27 = 500 \text{ W}$$

Otpor spirale iznosi:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U^2}{P} = \frac{220}{2{,}27} = \frac{220^2}{500} = 97\ \Omega$$

Količina toplote za 1 dan je:

$$Q = W = I^2 \cdot R \cdot t = 2{,}27^2 \cdot 97 \cdot 6 \cdot 3600 = 10800 \cdot 10^3 \text{ Ws}$$

Cena električne energije iznosi:

$$C = 0{,}500 \cdot 6 \cdot 30 \cdot 0{,}25 = 22{,}5 \text{ dinara.}$$

**2. primer:** Proračunati električni grejač za grejanje 60 litara vode od temperature $t_1 = 283$ K (10 °C) do $t_2 = 373$ K (100 °C) za vreme od 1 sata. Gubici toplote pri grejanju su 10%. Grejač treba da bude priključen na napon $U = 220$ V.

Rešenje: Uzimajući u obzir da je toplotni kapacitet vode $C = 4{,}2 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg °C}}$, količina toplote neophodna za zagrevanje 60 litara vode iznosi:

$$Q_1 = m \cdot c\,(t_2 - t_1) = 60 \cdot 4{,}2 \cdot 10^3\,(100 - 10) = 22680 \cdot 10^6 \text{ J}$$

Računajući s gubicima toplote ovaj se iznos povećava na:

$$Q_2 = \frac{Q_1}{90} \cdot 100 = \frac{22680 \cdot 10^6}{90} \cdot 100 = 25200 \cdot 10^6 \text{ J}$$

Električna snaga grejača iznosi:

$$P = \frac{Q_2}{t} = \frac{25200 \cdot 10^6}{3600} = 7000 \text{ W}$$

Jačina struje je:

$$I=\frac{P'}{U}=\frac{7000}{220}=31,8\ \text{A}$$

Električni otpor grejača je:

$$R=\frac{U}{I}=\frac{220}{31,8}=6,9\ \Omega$$

odnosno:

$$R=\frac{Q_2}{I^2\cdot t}=\frac{25,20\cdot 10^6}{31,8^2\cdot 3600}=6,9\ \Omega$$

Za izradu spirale odabiramo (iz priručnika) cekas-žicu, prečnika $d=2,8$ mm, koja ima radnu temperaturu grejanja $t=1100\ °C$ i dozvoljenu maksimalnu struju $I=36$ A.

Dužinu žice dobijemo iz formule (2.2.1):

$$l=\frac{R\cdot S}{\varrho}=\frac{R\cdot d^2\cdot\pi}{4\cdot\varrho}=\frac{6,9\cdot 2,8^2\cdot 3,14}{4\cdot 1,1}=38,6\ \text{m}$$

**3. primer:** Za topljenje aluminijumskih delova treba napraviti električnu peć, proračunatu za jednovremeno grejanje 30 aluminijskih delova mase po 400 g. Aluminijum treba grejati 40 minuta od temperature $t_1=15\ °C$ do $t_2=400\ °C$. Napon mreže je $U=220$ V, a stepen iskorišćenja $\eta=75\%$. Uzeti da je toplotni kapacitet aluminijuma $C=0,953\cdot 10^3\ \frac{\text{J}}{\text{kg}\ °\text{C}}$.

Rešenje: Masa aluminijuma topljena jednovremeno u peći je:

$$m=30\cdot 400=12000\ \text{g}=12\ \text{kg}$$

Količina toplote neophodna za topljenje iznosi:

$$Q'=m\cdot C\,(t_2-t_1)=12\cdot 0,953\cdot 10^3\,(400-15)=4,4\cdot 10^6\ \text{J}.$$

Količina toplote, računajući sa gubicima toplote, iznosi:

$$Q''=\frac{Q'}{\eta}=\frac{4,4\cdot 10^6}{0,75}=5,866\cdot 10^6\ \text{J}$$

Snaga grejača iznosi:

$$P = \frac{Q''}{t} = \frac{5,866 \cdot 10^6}{40 \cdot 60} = 2440\ \text{W}$$

Struja grejača je:

$$I = \frac{P}{U} = \frac{2440}{220} = 11\ \text{A}$$

Otpor grejača iznosi:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{220}{11} = 20\ \Omega$$

Odaberemo cekas-žicu, prečnika $d = 1,44$ mm, $I_{doz} = 14$ A. Dužina žice je:

$$l = \frac{R \cdot d^2 \cdot \pi}{4 \cdot \varrho} = \frac{40 \cdot 1,44^2 \cdot 3,14}{4 \cdot 1,1} = 28\ \text{m}$$

### 2.4.3. Zadaci za samostalno rešavanje

1. Kolika je snaga električne sijalice i koliko ona troši električne energije za šest sati, ako je otpor niti sijalice $R = 480\ \Omega$ i ako je ona proračunata za rad na mrežu s naponom $U = 220$ V?

2. Električna sijalica snage $P = 40$ W proračunata je za napon $U = 220$ V. Izračunati otpor niti sijalice.

3. Dve električne sijalice imaju istu snagu $P_1 = P_2 = 200$ W i priključene su, jedna na mrežu s naponom $U_1 = 127$ V, a druga $U_2 = 220$. Izračunati otpor svake sijalice. Kroz koju sijalicu će teći veća struja?

4. Električna sijalica proračunata je za napon $U = 127$ V i ima snagu $P = 200$ W. Izračunati struju, otpor sijalice i cenu električne energije ako 1 kWh staje 0,25 dinara. Sijalica svetli svakodnevno po 6 sati u toku 30 dana.

5. Spirala električne peći proračunata je za napon $U = 127$ V i izrađena od hromina prečnika $d = 0,4$ mm i dužine $l = 4,2$ m. Izračunati otpor spirale i njenu snagu. Koju količinu toplote peć daje za jedan sat?

6. Izračunati dužinu spirale grejnog elementa čija je snaga $P = 360$ W i napon $U = 120$ V. Spiralu treba izraditi od hromina prečnika $d = 0{,}25$ mm.

7. Za zagrevanje 1,25 l vode od temperature 18 °C do 100 °C u električnom bojleru, čija spirala ima otpor $R = 20\,\Omega$, potrebno je 5 minuta. Izračunati struju i napon mreže, ako gubici toplote u bojleru iznose 25%.

8. Grejanje 50 l vode od temperature $t_1 = 20$ °C do $t_2 = 100$ °C vrši se u toku jednog sata električnim bojlerom, proračunatim za napon $U = 127$ V. Izračunati snagu, otpor i dužinu nihromove legure, od koje je napravljen grejač bojlera, ako je njegov stepen iskorišćenja $\eta = 95\%$ Potrebno je uzeti žicu prečnika $d = 3$ mm i $I_{doz} = 40$ A.

9. Izračunati otpor grejnog elementa električne peći proračunate za napon $U = 220$ V, ako za dva sata peć oda $3600 \cdot 10^6$ J toplote.

10. U električnu peć postavljen je grejni element snage $P = 480$ W pri naponu $U = 220$ V. Izračunati otpor spirale grejaćeg elementa, količinu toplote koju odaje peć za jedan sat i cenu električne energije potrošene za jedan sat, ako je jedinična cena 1 kWh 0,25 dinara.

11. Električno lemilo snage $P = 35$ W treba izraditi za priključenje na mrežu napona $U = 120$ V. Izračunati dužinu nihromove žice (prečnika $d = 0{,}1$ mm, $I_{doz} = 0{,}6$ A) grejnog elementa i količinu toplote izdvojenu za 10 minuta kao i električnu energiju izdvojenu za jedan sat pri neprekidnom radu.

12. Izračunati stepen iskorišćenja motora jednosmerne struje, koji razvija snagu na vratilu $P = 3{,}7$ kW, ako je napon $U = 220$ V i struja motora $I = 18{,}5$ A.

13. Koliki električni rad izvrši izvor za vreme dok količina elektriciteta od 10 Ah prođe kroz zatvoreno električno kolo, ako je napon na krajevima električnog izvora stalan i iznosi 5 V?

14. U kolu se nalaze generator i motor. Ampermetrom je izmerena struja u kolu $I = 15$ A, a voltmetrom napon generatora 230 V i motora 218 V. Kolike su snage generatora i motora?

15. Električni motor izvrši koristan rad od 15 kWh za vreme od 3 sata. Ako je napon motora 450 V, a stepen iskorišćenja 0,91 kolika je struja motora?

16. Kolika treba da bude dužina žice od hromnikla ($\varrho = 1,1$) za grejalicu snage $P = 484$W i napona $U = 220$V, ako žica ima prečnik $d = 0,375$ mm i ako se zagreva na temperaturu od 800°C?

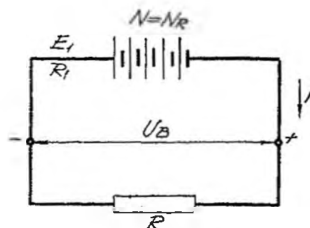
17. Sijalica sa vlaknom od volframa snage $P = 60$W priključena je na napon $U = 120$V. Koliko je električne energije pretvoreno u toplotu za vreme od jednog sata, ako se zna da se u svetlost pretvara samo 5% električne energije?

## 2.5. SPAJANJE IZVORA JEDNOSMERNE STRUJE

### 2.5.1. **Osnovni pojmovi i formule**

Izvori jednosmerne struje, galvanski elementi i akumulatori, imaju napon po ćeliji 1,5 odnosno 2V. Ovo zahteva vezivanje više elemenata u bateriju da bi se za određene svrhe dobio potreban napon, odnosno struja.

Elementi i akumulatori se mogu vezivati redno, paralelno i mešovito.



Sl. 2.5.1

a) Redna veza (sl. 2.5.1).

Elektromotorna sila baterije iznosi:

$$E_B = N_r \cdot E_1 \ [\mathrm{V}] \qquad (2.5.1)$$

a otpor baterije:

$$R_B = N_r \cdot R_1 \ [\Omega] \qquad (2.5.2)$$

Jačina struje u kolu je:

$$I = \frac{E_B}{R_B + R} = \frac{N_r \cdot E_1}{N_r \cdot R_1 + R} [\mathrm{A}] \qquad (2.5.3)$$

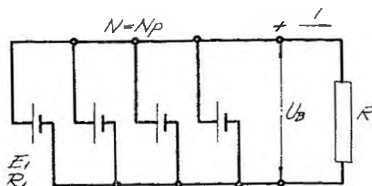
b) Paralelna veza (sl. 2.5.2)

Elektromotorna sila baterije iznosi:

$$E_B = E_1 \ [\mathrm{V}] \qquad (2.5.4)$$

a otpor baterije:

$$R_B = \frac{R_1}{N_p} [\Omega] \qquad (2.5.5)$$



Sl. 2.5.2

Jačina struje u kolu je:

$$I = \frac{E_B}{R_B + R} = \frac{E_B}{\frac{R_1}{N_P} + R} \ [\mathrm{A}] \qquad (2.5.6)$$

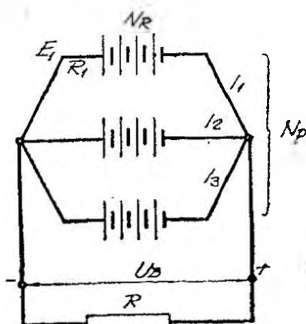
c) Mešovita veza (sl. 2.5.3).

Elektromotorna sila baterije iznosi:

$$E_B = N_r \cdot E_1 [\Omega] \qquad (2.5.7)$$

a otpor baterije:

$$R_B = \frac{N_r \cdot R_1}{N_p} [\Omega] \qquad (2.5.8)$$




Sl. 2.5.3

Jačina struje u kolu je:

$$I = \frac{E_B}{R_B + R} = \frac{N_r \cdot E_1}{\frac{N_r \cdot R_1}{N_P} + R} [\mathrm{A}] \qquad (2.5.9)$$

U obrascima od (2.5.1) do (2.5.9)

$E_B$ [V] — elektromotorna sila baterije,
$R_B$ [Ω] — unutrašnji otpor baterije,
$E_1$ [V] — elektromotorna sila jednog elementa,
$R_1$ [Ω] — unutrašnji otpor jednog elementa,
$R$ [Ω] — spoljašnji otpor,
$I$ [A] — struja baterije,
$N$ — ukupan broj elemenata,
$N_r$ — broj elemenata vezanih na red,
$N_p$ — broj elemenata vezanih paralelno.

### 2.5.2. **Primeri**

**1. primer:** Kolika je struja baterije od 5 elemenata, sa $E_1 = 1{,}1$ V i $R_1 = 0{,}05\ \Omega$ vezanih paralelno, ako je na krajevima grupe priključen otpor od $R = 0{,}1\ \Omega$?

Rešenje: Struju ćemo izračunati iz formule (2.5.6):

$$I = \frac{E_1}{\frac{R_1}{N_P} + R} = \frac{1{,}1}{\frac{0{,}05}{5} + 0{,}1} = 10\ \mathrm{A}$$

**2. primer:** Ako je 10 elemenata ($N = 10$), $E_1 = 1{,}4$ V i $R = 0{,}06\Omega$ vezano u dve grupe ($N_p = 2$) po 5 elemenata na red ($N_r = 5$) i na krajeve baterije priključen otpor $R = 2{,}85\ \Omega$, kolika je struja u kolu?

Struju ćemo izračunati iz formule (2.5.9):

$$I = \frac{N_r \cdot E_1}{\dfrac{N_r \cdot R_1}{N_p} + R} = \frac{5 \cdot 1{,}4}{\dfrac{5 \cdot 0{,}06}{2} + 2{,}85} = 2\ \text{A}$$

### 2.5.3. Zadaci za samostalno rešavanje

1. Baterija od 6 jednakih elemenata vezanih na red daje struju od $I = 2$A kroz potrošač čiji je otpor $R = 5\Omega$. Unutrašnji otpor jednog elementa iznosi $R_1 = 0{,}075\Omega$. Kolika je elektromotorna sila jednog elementa, a kolika cele baterije?

2. Na akumulatoru čija je elektromotorna sila $E_1 = 2{,}1$ V, a unutrašnji otpor $R_u = 0{,}02\ \Omega$ priključen je spoljašnji otpor $R = 0{,}4\ \Omega$. Izračunati struju u kolu i napon na krajevima baterije.

3. Za rezervno osvetljenje jedne učionice postavljena je jedna sijalica od 60 W za napon od 24 V. Koliko elemenata od 2 V treba vezati na red i kolika je količina elektriciteta potrebna da bi sijalica svetlela 5 časova?

4. Koliki su napon i struja baterije od 10 elemenata sa $E_1 = 1{,}5$ V i $R_1 = 0{,}2\ \Omega$ kada se vežu na red, a koliki su kada se vežu paralelno na spoljašnji otpor $R = 3\ \Omega$?

5. U kolu su redno uključena tri izvora električne energije s unutrašnjim otporom po $0{,}2\ \Omega$. U spoljnom kolu uključen je potrošač čiji je otpor $4{,}4\ \Omega$. Kolika je elektromotorna sila jednog izvora ako je struja u kolu $I = 1{,}2$ A?

6. Suva baterija sastoji se od 50 redno spojenih elemenata čije su elektromotorne sile po $E_1 = 1{,}54$ V i unutrašnji otpor $R_1 = 2\ \Omega$. Koliki je otpor potrošača koji će biti priključen na bateriju ako je struja $I = 20$ mA?

7. Suva baterija se sastoji od dvanaest paralelno spojenih elemenata, čije su elektromotorne sile $E_1 = 1{,}54$ V i unutrašnji otpor $R_1 = 3{,}6\ \Omega$. Kapacitet baterije je 100 Ah. Kolika je struja i vreme pražnjenja pri priključenju otpora $R = 10\ \Omega$ na bateriju?

# 3. NERAZGRANATA KOLA JEDNOSMERNE STRUJE

Nerazgranata kola jednosmerne struje predstavljena su na sl. 3.1.1. To su kola kod kojih su redno u zatvorenom kolu spojeni provodnici sa otporima $R_1$, $R_2$ $R_3$ itd. Kako tu nema grananja, ista struja jačine $I$ teći će kroz otpore $R_1$, $R_2$, $R_3$ itd.

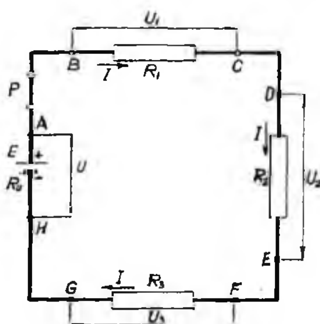
## 3.1. KOLA SA JEDNIM IZVOROM STRUJE

### 3.1.1. **Osnovni pojmovi i formule**

Napon na stezaljkama izvora na sl. 3.1.1 jednak je sumi padova napona u spoljnom kolu:

$$U = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + I \cdot R_3 \qquad (3.1.1)$$

Elektromotorna sila izvora jednaka je sumi unutrašnjeg pada napona i padova napona u spoljnom kolu:



Sl. 3.1.1

$$E = I \cdot R_u + I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + I \cdot R_3 = I \cdot R_u + U \qquad (3.1.2)$$

Ista struja jačine $I$ teći će redom kroz otpore $R_1$, $R_2$, $R_3$ i stvarati padove napona:

$$U_1 = I \cdot R_1$$

$$U_2 = I \cdot R_2$$

$$U_3 = I \cdot R_3$$

Koristeći se drugim Kirhofovim zakonom dobijemo ukupni ili ekvivalentni otpor kola:

$$U = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + I \cdot R_3$$

$$I \cdot R = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + I \cdot R_3$$

ili nakon skraćenja sa $I$:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 \qquad (3.1.3)$$

Ukupni otpor redno vezanih otpora jednak je sumi tih otpora.

Ako je $R_1 = R_2 = R_3 = R_u$ i ako u kolu postoji $n$ otpora tada je:

$$R = n \cdot R_n \qquad (3.1.4)$$

### 3.1.2. **Primeri**

**1. primer:** U kolu prikazanom na sl. 3.1.1 ems akumulatorske baterije je $E = 40{,}5\text{V}$, a unutrašnji otpor $R_u = 0{,}8\ \Omega$. Otpori potrošača su: $R_1 = 4{,}2\ \Omega$, $R_2 = 2{,}6\ \Omega$ i $R_3 = 8{,}6\ \Omega$.

Izračunati struju u kolu, napon na stezaljkama akumulatorske baterije i potrošača, a takođe i snagu izvora struje, snagu svih potrošača i stepen iskorišćenja izvora struje.

Rešenje: Ekvivalentni otpor spoljnog kola iznosi:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 = 4{,}2 + 2{,}6 + 8{,}6 = 15{,}4\Omega$$

Struja u kolu je:

$$I = \frac{E}{R_u + R} = \frac{40{,}5}{0{,}8 + 15{,}4} = \frac{40{,}5}{16{,}2} = 2{,}5\ \text{A}$$

Napon na stezaljkama izvora je:

$$U = E - I \cdot R_u = 40{,}5 - 2{,}5 \cdot 0{,}8 = 40{,}5 - 2{,}0 = 38{,}5\ \text{V}$$

Napon na stezaljkama potrošača iznosi:

$$U_1 = I \cdot R_1 = 2{,}5 \cdot 4{,}2 = 10{,}5\ \text{V}$$

$$U_2 = I \cdot R_2 = 2{,}5 \cdot 2{,}6 = 6{,}5\ \text{V}$$

$$U_3 = I \cdot R_3 = 2{,}5 \cdot 8{,}6 = 21{,}5\ \text{V}$$

a njihova suma: $U_1 + U_2 + U_3 = 10{,}5 + 6{,}5 + 21{,}5 = 38{,}5$ V, što znači da je suma padova napona jednaka naponu na stezaljkama izvora struja.

Izvor struje ima snagu:

$$P_i = E \cdot I = 40{,}5 \cdot 2{,}5 = 101 \text{ W}$$

a deo te snage:

$$P_u = I^2 \cdot R_u = 2{,}5^2 \cdot 0{,}8 = 5 \text{ W}$$

troši se u izvoru. To znači da izvor odaje u spoljno kolo snagu:

$$P = P_i - P_u = 101 - 5 = 96 \text{ W}$$

Tu snagu možemo odrediti i pomoću izraza:

$$P = UI = 38{,}5 \cdot 2{,}5 = 96 \text{ W}$$

Poznavajući snagu $P$ i $P_i$ odredićemo i stepen iskorišćenja izvora:

$$\eta = \frac{P}{P_i} = \frac{96}{101} = 0{,}95 \text{ ili } 95\%$$

Snaga na pojedinim otporima je:

$$P_1 = I^2 \cdot R_1 = 2{,}5^2 \cdot 4{,}2 = 6{,}25 \cdot 4{,}2 = 26{,}3 \text{ W ili}$$

$$P_1 = I \cdot U_1 = 2{,}5 \cdot 10{,}5 = 26{,}3 \text{ W}$$

$$P_2 = I^2 \cdot R_2 = 6{,}25 \cdot 2{,}6 = 16{,}1 \text{ W}$$

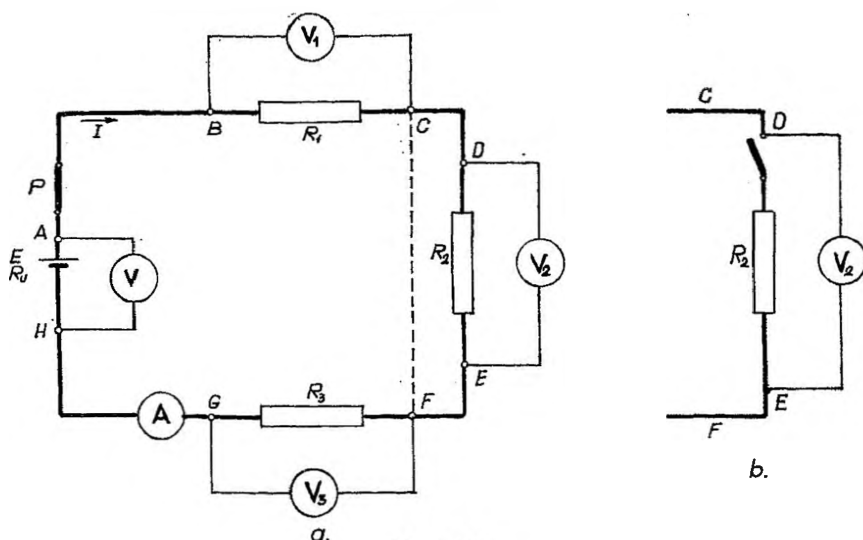
$$P_3 = I^2 \cdot R_3 = 6{,}25 \cdot 8{,}6 = 53{,}6 \text{ W}$$

Na osnovu zakona o održanju energije sledi:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 26{,}3 + 16{,}1 + 53{,}6 = 96 \text{ W}$$

Ovo je bilans snage koji može služiti pri proračunu električnih kola za proveru tačnosti proračuna.

**2. primer:** Šta će pokazati istrumenti prema sl. 3.1.2 pri prekidu otpora $R_2$ (režim praznog hoda), a šta pri kratkom spoju stezaljki $C$ i $F$ (režim kratkog spoja)?




Sl. 3.1.2

Rešenje: Posmatramo isto kolo kao u 1. primeru. Ako, na primer, odvojimo otpor $R_2$ od stezaljke $D$, prema sl. 3.1.2b, spoljni deo kola će biti prekinut. U tom slučaju će ampermetar pokazivati nulu. Voltmetri $V_1$ i $V_3$ pokazuju napone:

$$U_1 = I \cdot R_1 = 0 \cdot R_1 = 0; \quad U_3 = 0 \cdot R_3 = 0$$

A šta pokazuju voltmetri $V$ i $V_2$?

Prvi od njih ($V$) pokazuje napon na stezaljkama izvora. Ako kroz kolo ne protiče struja, voltmetar pokazuje:

$$U = E - I \cdot R_u = E - 0 \cdot R_u = E$$

tj. voltmetar meri ems izvora.

Drugi voltmetar ($V_2$) pokazuje napon na prekinutom delu kola, čiji je otpor $R_{DE} = \infty$.

Po Omovu zakonu je: $U_2 = I \cdot R_{DE} = 0 \cdot \infty$ (neodređeno), tj. ovaj izraz ne daje odgovor na pitanje.

Ranije smo imali izraz $U = U_1 + U_2 + U_3$, odakle sledi:

$$U_2 = U - U_1 - U_3 = U - 0 - 0 = U$$

tj. voltmetar $V_2$ takođe pokazuje napon na stezaljkama izvora. I taj napon je jednak u datom slučaju ems $E$.

Do ovog rezultata možemo doći i na ovaj način. Ako nema padova napona na delovima $BC$ i $GF$ (sl. 3.1.2a) biće jednaki potencijali u tačkama $B$ i $D$, odnosno $G$ i $E$ ($\varphi_B = \varphi_D$ $\varphi_G = \varphi_E$), a razlika potencijala $\varphi_B - \varphi_G$ jednaka je razlici potencijala $\varphi_D - \varphi_E$ ili $U = U_2$.

U slučaju kratkog spoja stezaljki $C$ i $F$ (crtkano na sl. 3.1.2a) otpor toga dela je vrlo mali, tako da se može uzeti da je $R_{CF} = 0$.

U tom slučaju struja u kolu je:

$$I' = \frac{E}{R_u + R_1 + R_{CF} + R_3} = \frac{40,5}{0,8 + 4,2 + 0 + 8,6} =$$

$$= \frac{40,5}{13,6} = 2,98 \text{ A} > I = 2,5 \text{ A}$$

Struja kroz otpor $R_2$ jednaka je nuli i voltmetar $V_2$ pokazuje nulu, a pokazivanje voltmetra $V_1$ i $V_3$ raste.

Napon na stezaljkama izvora $U = E - I \cdot R_u$ se smanjuje, jer se struja povećava.

### 3.1.3. **Zadaci za samostalno rešavanje**

1. Izvor sa ems $E = 60\text{V}$ i unutrašnjim otporom $R = 0,2\Omega$ uključen je redno sa četiri otpora $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = R_3 = 4\ \Omega$ i $R_4 = 0,8\ \Omega$.

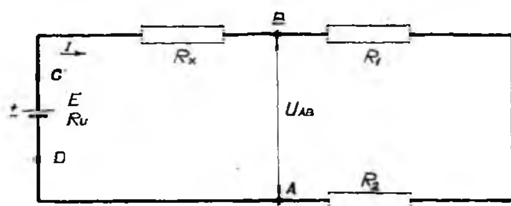
Sastaviti električnu šemu i odrediti struju u kolu, padove napona na svim otporima, napon na stezaljkama izvora, a takođe i snagu svih potrošača.

2. Otpori $R_1$, $R_2$, $R_3$, $R_4$, i $R_5$ spojeni su na red i priključeni na mrežu napona $U$ (tabela 6). Odrediti u svakoj varijanti otpor, struju kola, a takođe i padove napona na otporima i snagu pojedinih otpora. Napraviti bilans snage.

**Tabela 6**

| Veličina | Varijante | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| $R_1$ [Ω] | 40 | 10 | 26 | 150 | 32 | 25 | 284 | 1020 | 180 | — |
| $R_2$ [Ω] | 70 | 12 | 23 | 188 | 12 | — | 262 | 183 | 45 | 50 |
| $R_3$ [M Ω] | 1 | 0,2 | 0,2 | 0,05 | 0,57 | 0,03 | 16,6 | 0,03 | 0,02 | 0,01 |
| $R_4$ [Ω] | 15 | 5 | 69 | — | 43 | 12 | 245 | 260 | 320 | 72 |
| $R_5$ [Ω] | 20 | 30 | 50 | — | 27 | 72 | 332 | 1100 | 60 | 125 |
| $U$ [V] | 220 | 120 | 127 | 110 | 60 | 24 | 600 | 400 | 220 | 220 |

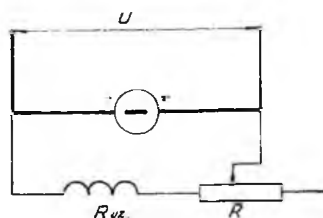
3. Električno kolo sastoji se od generatora jednosmerne struje ems $E = 120$ V i pet reostata, sa otporima $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 2\,\Omega$ i $R_5 = 3{,}5\,\Omega$ spojenih na red. Koliki su: struja, napon na stezaljkama generatora, padovi napona na svakom otporu i snaga, ako je unutrašnji otpor generatora $R_u = 0{,}5\,\Omega$, a otpor linije $R_L = 0{,}5\,\Omega$?



Sl. 3.1.3

4. U električnom kolu (sl. 3.1 3) odrediti otpor $R_x$, ako je $E = 12\,V$, $R_1 = 1{,}6\,\Omega$ i $R_2 = 1{,}8\,\Omega$, a struja u kolu iznosi: $I = 3$A. Unutrašnji otpor izvora zanemariti.

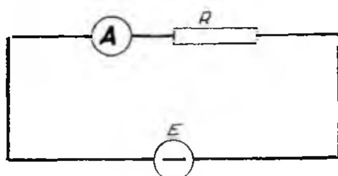
5. Odrediti najveću i najmanju vrednost promenljivog otpora $R$ prema sl. 3.1.4, kojim regulišemo struju od 1 do 1,8 A u namotaju pobude generatora ako je otpor namotaja 50 Ω, a napon na stezaljkama $U =$ 110 V.



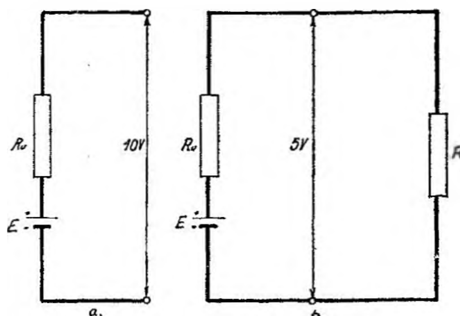
Sl. 3.1.4

6. Na izvor napona 10 V priključen je otpor od 10 Ω. Uključeni ampermetar pokazuje struju od 0,5 A. Koliki je otpor ampermetra prema sl 3.1.5?

7. Na stezaljkama neopterećenog izvora izmeren je napon od 10 V. Ako se iz-




Sl. 3.1.5




Sl. 3.1.6

vor optereti otporom od 10 Ω, napon na stezaljkama opašće na 5 V (sl. 3.1.6). Koliki je unutarnji otpor izvora?

8. Na izvor napona 96 V priključena su dva redno spojena otpora. Prvi otpor $R_1 = 14\,\Omega$ ima snagu 56 W. Odrediti ukupnu snagu u kolu, a takođe i struju u kolu i veličinu drugog otpora $R_2$.

9. Dve sijalice, građene za napon 110 V, od kojih jedna ima snagu 25 W ($P_1$), a druga snagu 100 W ($P_2$), priključene su redno na mrežu napona $U = 220$ V. Koliki će pad napona biti na svakoj sijalici?

10. Pet električnih sijalica snage po 60 W, proračunate za napon $U = 120$ V, uključene su redno u jedno kolo za osvetljenje tramvajskih kola na napon $U = 600$ V. Koliki su otpori električnog kola i struja?

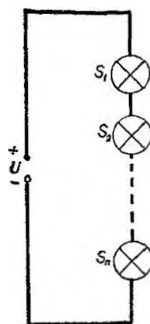
11. Petnaest električnih sijalica (napon svake sijalice je 6,3 V) proračunate su za struju $I = 0{,}28$ A. Koliki je ukupni otpor sijalica pri njihovom rednom spoju, a takođe i otpor reostata uključenog u kolo, ako sijalice treba da budu priključene na mrežu napona $U = 120$ V?

12. Za osvetljenje novogodišnje jelke uzeto je 15 električnih sijalica napona $U_s = 12$ V i otpora $R_s = 10\,\Omega$. Priključene su na mrežu 220 V. Proračunati veličinu dodatnog otpora koji je neophodno redno priključiti u kolo sijalica.

13. U mrežu napona $U=220$ V priključene su na red dve električne sijalice snage $P_1=100$ W i $P_2=400$ W proračunate za napon $U_s=127$ V. Koliki je pad napona na svakoj sijalici?

14. Električne sijalice proračunate za napon $U_s=120$ V, snaga $P_1=40$ W i $P_2=150$ W, priključene su redno na mrežni napon $U=220$ V. Koliki je pad napona na svakoj sijalici i koja od njih može pregoreti?

15. Jedna od »$n$« električnih sijalica prema sl. 3.1.7, je pregorela i sve su se sijalice ugasile. Sijalice imaju balon od matiranog stakla kroz koje se nit sijalice ne vidi. Kako ćemo pomoću voltmetra pronaći sijalicu koja je pregorela?

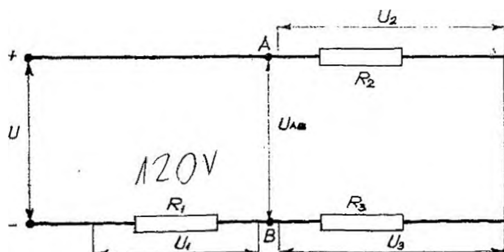


Sl. 3.1.7

16. Kako ćemo pronaći sijalicu u prethodnom zadatku koja je pregorela ako nemamo voltmetar?

17. Odrediti veličinu tri redno vezana otpora $R_1$, $R_2$ i $R_3$, ako je napon na stezaljkama kola $U=120$ V, a snaga na prvom otporu $P_1=48$ W. Odnos otpora je $R_1 : R_2 : R_3 = 2 : 3 : 5$.

18. Odrediti napon $U_{BC}$ na otporu $R_x$ prema sl. 3.1.3 i veličinu otpora $R_x$, ako je $E=50{,}4$ V, $U_{AB}=24$ V i $R_u=2\,\Omega$. Struja u kolu je $I=1{,}2$ A.

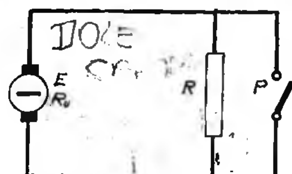


Sl. 3.1.8

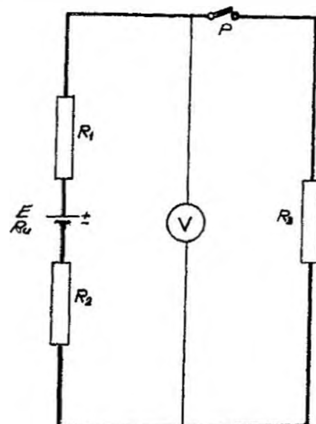
19. U električnom kolu, prema sl. 3.1.8, je $U=120$ V, $U_{AB}=75$ V, $R_1=9\,\Omega$ i $R_2=R_3$. Odrediti padove napona $U_1$, $U_2$ i $U_3$ i otpor $R_2$.

20. Pri otvorenom prekidaču $P$ na sl. 3.1.9 ampermetar pokazuje 5 A, a pri zatvorenom 50 A (struja kratkog spoja). Odrediti odnos unutrašnjeg otpora $R_u$ i otpora opterećenja $R$.

21. U električnom kolu na sl. 3.1.10 pri zatvorenom prekidaču $P$ voltmetar pokazuje 18 V, a pri otvorenom 56 V. Odrediti unutrašnji otpor izvora, ako je $R_1 = 54\,\Omega$, $R_2 = 18\,\Omega$ i $R_3 = 36\,\Omega$.

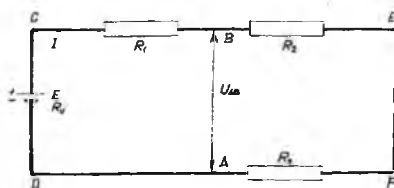


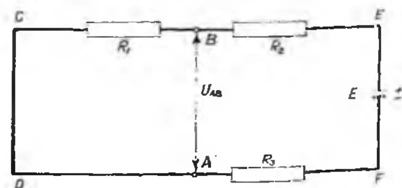
Sl. 3.1.9



Sl. 3.1.10

22. U električnom kolu sl. 3.1.11 napon $U_{AB} = 28$ V. Posle prenosa izvora iz dela $CD$ u deo $EF$ prema sl. 3.1.11.b, izme-

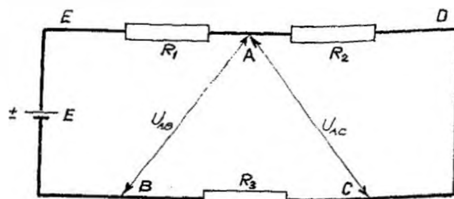


Sl. 3.1.11

rili smo napon $U_{AB} = 8$ A. Odrediti ems izvora uzimajući u obzir da je njegov unutrašnji otpor jednak nuli.

23. Odrediti struju u kolu i ems prema sl. 3.1.12 ako je $U_{AB} = 36$ V, $R_1 = 6\,\Omega$ i $R_2 = 12\,\Omega$. Posle prenosa izvora iz dela $EB$ u deo $CD$ napon $U_{AB} = 24$ V. Uzeti da je unutrašnji otpor $R_u = 0$.



Sl. 3.1.12

## 3.2. KOLA SA VIŠE IZVORA STRUJE. POTENCIJALNE TAČKE ELEKTRIČNOG KOLA

### 3.2.1. **Osnovni pojmovi i formule**

Omov zakon za kolo sa više izvora električne energije glasi:

$$I = \frac{\sum_{k=1}^{n} E_k}{\sum_{k=1}^{n} R_k} [\mathrm{A}] \qquad (3.2.1)$$

gde su:

$\sum_{k=1}^{n} E_k$ [V] — algebarska suma ems svih izvora električne energije,

$\sum_{k=1}^{n} R_k$ [Ω]— algebarska suma svih otpora (potrošača) kola.

Pri proračunu kola sa više izvora električne energije (sl 3.2.1) i otpora (potrošača), spojenih redno, redosled proračuna je sledeći:

a – smer ems u svakom izvoru energije uslovno uzimamo od negativnog pola ka pozitivnom;

b—smer obilaska konture odaberemo u smeru kazaljke na satu ili obratno;

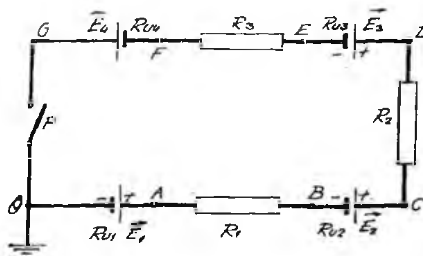
c—ems i struje, čiji se smer podudara s odabranim smerom obilaska, uzimaju se sa znakom plus, a one čiji se smer ne podudara s odabranim sa znakom minus;

d—negativne vrednosti struje dobijene kao rezultat proračuna ukazuju na to da je smer obilaska konture izabran nepravilno, pa je radi toga smer struje imao suprotan smer.

### 3.2.2. **Primeri**

**1. primer:** U električnom kolu (sl. 3.2.1) zadano je $E_1 = 9$ V, $E_2 = E_3 = 3$ V, $E_4 = 15$ V, $R_1 = 28\ \Omega$, $R_2 = 7{,}5\ \Omega$, $R_3 = 20\ \Omega$, $R_{u1} = R_{u4} = 2\ \Omega$ i $R_{u3} = 0{,}5\ \Omega$. Unutrašnji otpor drugog izvora možemo zanemariti.

Izračunati struju u kolu i potencijale svih tačaka označenih na šemi.



Sl. 3.2.1

R e š e n j e: U razmatranoj šemi tri ems ($E_1$, $E_2$ i $E_4$) deluju u jednom smeru i njihova suma iznosi: $E' = E_1 + E_2 + E_4 = 9 + 3 + 15 = 27$V. Jedna ems $E_3$ deluje u suprotnom smeru. Pošto je $E' > E_3$, to je jačina struje:

$$I = \frac{\sum_{k=1}^{n} E_k}{\sum_{k=1}^{n} R_k} = \frac{E' - E_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_{u1} + R_{u3} + R_{u4}} = \tag{3.2.1}$$

$$= \frac{27 - 3}{28 + 7,5 + 20 + 2 + 0,5 + 2} = 0,4 \text{ A}$$

Smer ove struje se, prema tome, podudara sa smerom ems $E'$.

Pri proračunu potencijala tačaka električnog kola treba uzeti jednu tačku u kolu čiji je potencijal jednak nuli, na primer tačku $O$. Tada je potencijal tačke $A$ jednak naponu između tačaka $A$ i $O$ ili razlici potencijala:

$$\varphi_A - \varphi_O = U_{AO} = E_1 - I \cdot R_{u1} = 9 - 0,4 \cdot 2 = 8,2 \text{ V}$$

(Izvor sa ems $E_1$ radi u režimu generatora). To znači da potencijal bilo koje tačke ($A$) kola jednak naponu $U_{AO}$ između te tačke ($A$) i druge ($O$), za koju smo uzeli da je njen potencijal jednak nuli. Takav put je potpuno pravilan, ali dosta dugačak. Prostije je, na primer, za izračunavanje potencijala $\varphi_B$ koristiti se već izračunatim potencijalom $\varphi_A = 8,2$ V i poznatim naponom na stezaljkama dela

$AB$. Sledi da je potencijal tačke $B$ manji od potencijala tačke $A$ za veličinu pada napona na otporu $R_1$:

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = I \cdot R_1$$

jer je struja kroz otpor usmerena od tačke višeg potencijala prema tački nižeg potencijala. Iz gornjeg izraza sledi:

$$\varphi_B = \varphi_A \quad U_{AB} = \varphi_A - I \cdot R_1 = 8{,}2 - 0{,}4 \cdot 28 = -3\ \text{V}$$

Znajući potencijal u tački $B$ ($\varphi_B = -3$ V) izračunajmo potencijal $\varphi_C$ tačke $C$. Pošto izvor sa ems $E_2$ nema unutrašnji otpor to je potencijal njegovog pola »+« uvek (pri bilo kojoj struji) veći od potencijala pola »—« za veličinu ems $E_2$ ili njemu jednakog napona $U_{BC} = 3$ V. Zato je:

$$\varphi_C = \varphi_B + U_{BC} = -3 + 3 = 0$$

Za deo $CD$ razlika potencijala iznosi:

$$\varphi_C - \varphi_D = U_{CD} = I \cdot R_2 \text{ ili}$$

$$\varphi_D = \varphi_C - I \cdot R_2 = 0 - 0{,}4 \cdot 7{,}5 = -3\ \text{V}$$

Na delu $DE$ potencijal tačke $E$ je manji od potencijala tačke $D$ i to iz dva razloga: radi pada napona na unutrašnjem otporu i radi toga što je tačka $E$ pored pola »—« izvora, a tačka $D$ pored pola »+«:

$$\varphi_E = \varphi_D - I \cdot R_{u3} - E_3 = -3 - 0{,}4 \cdot 0{,}5 - 3 = -6{,}2\ \text{V}$$

Za deo $EF$ razlika potencijala je:

$$\varphi_E - \varphi_F = U_{EF} = I \cdot R_3 = 0{,}4 \cdot 20 = 8\ \text{V}$$

odakle je:

$$\varphi_F = \varphi_E - 8 = -6{,}2 - 8 = -14\ \text{V}$$

Na delu $FG$, pri prolazu od tačke $F$ na tačku $O$, potencijal raste za veličinu ems $E_4$, jer prelazimo od pola »—« ka polu »+« izvora, a smanjuje se za veličinu pada napona na unutrašnjem otporu $I \cdot R_{u4}$ pošto se krećemo u smeru struje:

$$\varphi_G = \varphi_O = \varphi_F + E_4 - I \cdot R_{u4} = -14{,}2 + 15 - 0{,}4 \cdot 2 = 0$$

Dobijeni rezultat za potencijal tačke $O$ ujedno je i provera pravilnog računanja.

**2. primer:** Za električno kolo iz prethodnog primera izračunati napon $U_{BE}$ i potencijale pojedinih tačaka kola za slučaj otvorenog prekidača $P$. Može li se još neka tačka u kolu uzemljiti (to je tačka čiji je potencijal nula)?

Rešenje: Pomoću izračunatih potencijala tačaka kola lako je odrediti napon između pojedinih tačaka. Tako je, na primer, $U_{BE} = \varphi_B - \varphi_E = -3 - (-6{,}2) = 3{,}2\ V$.

Pri otvorenom prekidaču $P$, (sl. 3.2.1) struja je $I = 0$. Uzimajući da je potencijal $\varphi_0 = 0$, dobijamo:

$\varphi_A = \varphi_0 + E_1 - I \cdot R_{u1} = E_1 = 9\ V$, odnosno

$$\varphi_B = \varphi_A - U_{AB} = \varphi_A - I \cdot R_1 = \varphi_A - 0 \cdot R_1 = 9\ V.$$

$$\varphi_C = \varphi_B + E_2 = 9 + 3 = 12\ V$$

$$\varphi_D = \varphi_C - U_{CD} = 12\ V$$

$$\varphi_E = \varphi_D - E_3 - I \cdot R_{u3} = 12 - 3 = 9\ V$$

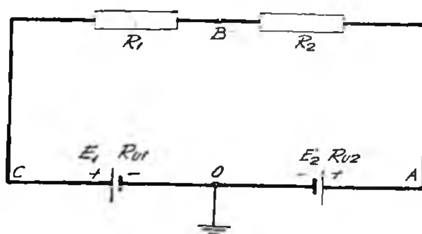
$$\varphi_F = \varphi_E = 9\ V$$

$$\varphi_G = \varphi_F + E_4 - I \cdot R_{u4} = 9 + 15 = 24\ V$$

Nijedna tačka, osim tačke $O$, ne može se uzemljiti, jer se nalaze na potencijalu većem od nule.

### 3.2.3. Zadaci za samostalno rešavanje

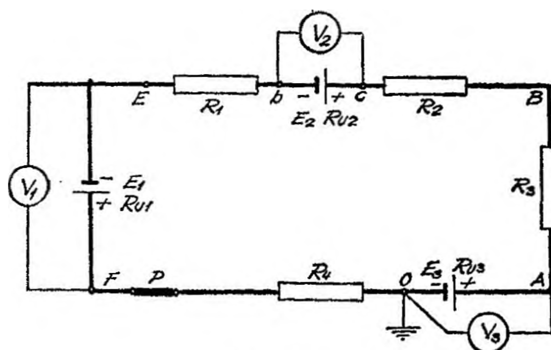
1. Za električno kolo (sl. 3.2.2) izračunati struju i napon na delovima kola, snagu izvora i potrošača. Sastaviti bilans snage.




Sl. 3.2.2

Zato je: $E_1 = 48\ V$, $E_2 = 24\ V$, $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 28\ \Omega$ i $R_{u1} = R_{u2} = 1\ \Omega$. Odrediti režim rada izvora.

2. Kako se menja (povećava ili smanjuje) pokazivanje voltmetra (sl. 3.2.3) pri otvorenom prekidaču $P$, ako je $E_1 = 24$ V. $E_2 = 60$ V ili $E_3 = 12$ V?




Sl. 3.2.3

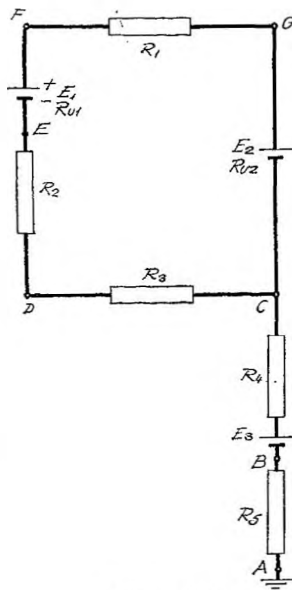
3. Za kolo na sl, 3.2.3 izračunati potencijale svih označenih tačaka, ako je $E_1 = E_2 = 12$V , $E_3 = 30$ V, $R_1 = R_2 = 9\ \Omega$, $R_{u1} = 2\ \Omega$, $R_{u2} = R_{u3} = 0$ i $R_3 = R_4 = 20\ \Omega$

Prekidač $P$ je zatvoren.

4. Izračunati potencijale svih označenih tačaka na šemi za kolo razmatrano u prethodnom zadataku, pri otvorenom prekidaču $P$.

5. Za kolo (sl. 3.2.4) izračunati potencijale svih naznačenih tačaka, ako je $E_1 = E_3 = 90$ V, $E_2 = 120$ V, $R_1 = R_2 = R_5 = 15\ \Omega$, $R_3 = R_4 = 7{,}5\Omega$, $R_{u1} = R_{u2} = 1{,}25\ \Omega$, $R_{u3} = 0$.

Odrediti, takođe, napone $U_{GD}$ (između tačaka $G$ i $D$) i $U_{FB}$ (između tačaka $F$ i $B$).



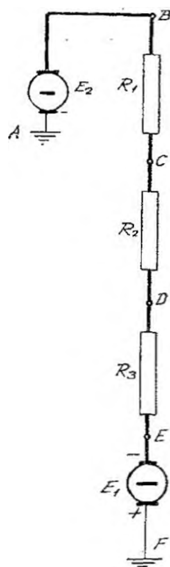

Sl. 3.2.4

6. Za kolo (sl. 3.2.5) zadato je: $E_1 = 12$ V, $E_2 = 30$ V, $R_1 = 120\ \Omega$, $R_2 = 60\ \Omega$, $R_{u1} = R_{u2} = 0$,

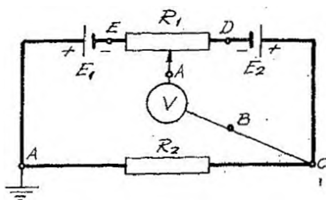
Izračunati otpor dela $OD$ reostata $R_1$ i potencijal tačke $O$, ako je napon između tačaka $O$ i $C$ jednak 22 V.

7. Naći još jednu tačku (treću) u kolu (sl. 3.2.6), koju možemo uzemljiti, ne izmenivši potencijale ostalih tačaka kola.

Zadato je: $E_1 = 180$ V, $E_2 = 135$ V, $R_3 = 2000\ \Omega$ i $R_1 = R_2 = 50\ \Omega$. Unutrašnje otpore generatora zanemariti.



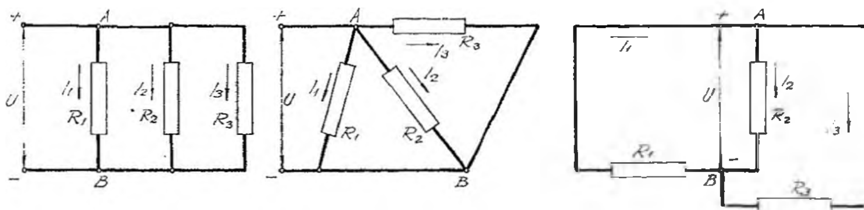

Sl. 3.2.6




Sl 3.2.5

# 4. RAZGRANATA KOLA JEDNOSMERNE STRUJE S JEDNIM IZVOROM ENERGIJE

Razgranata kola jednosmerne struje predstavljena su na sl. 4.1.1 To su kola kod kojih je, u najprostijem slučaju, spojeno mnogo paralelnih otpora $R_1$, $R_2$, $R_3$ itd. Kako ovi otpori čine paralelne grane koje počinju i završavaju u zajedničkim čvorištima $A$ i $B$ sa potencijalima $\varphi_A$ i $\varphi_B$, onda isti napon $U=\varphi_A-\varphi_B$ deluje između krajeva svakog otpora $R_1$, $R_2$, $R_3$ itd.




Sl. 4.1.1

## 4.1. PARALELNO VEZIVANJE OTPORA

### 4.1.1. **Osnovni pojmovi i formule**

Paralelno vezivanje daje takvu grupu kod koje se svi otpori nalaze pod istim naponom. Ovakva veza sa različitim šemama prikazivanja data je na sl. 4.1.1. Prema Omovom zakonu glavna

struja $I$ srazmerna je naponu, a obrnuto srazmerna ukupnom otporu grupe $R$. Ukupni otpor će biti po Omovom zakonu:

$$R = \frac{U}{I} \, [\Omega]$$

Struja $I$ se, prema prvom Kirhofovom zakonu, grana na tri struje $I_1$, $I_2$, $I_3$, tako da prema Omovom zakonu mora biti:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} \quad I_2 = \frac{U}{R_2} \quad I_3 = \frac{U}{R_3}$$

jer na krajevima svih triju otpora vlada isti napon $U$.

Ako sada primenimo prvi Kirhofov zakon imamo:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3}$$

i ako obe strane jednačine podelimo naponom $U$ dobijamo:

$$\frac{1}{R} = \frac{I}{U} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{R} \qquad (4.1.1)$$

Iz ovog zaključujemo da je recipročna vrednost ukupnog (ekvivalentnog) otpora grupe paralelno vezanih otpora jednaka zbiru recipročnih vrednosti pojedinih otpora.

Ako grupu paralelno vezanih otpora čini $n$ otpora jednakog otpora $R_1$, biće ekvivalentni otpor, prema obrascu 4.1.1:

$$R = \frac{R_1}{n} \qquad (4.1.2)$$

U specijalnom slučaju samo dva paralelna otpora $R_1$ i $R_2$ malom izmenom obrazac 4.1.1 može se svesti na oblik:

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \qquad (4.1.3)$$

Prema tome je u posmatranom specijalnom slučaju:

$$U = I \cdot R = I \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

tako da za struje u pojedinim granama dobijemo obrasce:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{I \cdot R_2}{R_1 + R_2} \text{ i} \qquad (4.1.4)$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{I \cdot R_1}{R_1 + R_2} \qquad (4.1.5)$$

Za tri paralelna otpora $R_1$, $R_2$ i $R_3$ obrazac 4.1.1 za ukupni otpor $R$ prelazi u oblik:

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3} \qquad (4.1.6)$$

Osim računski, po obrascima 4.1.3 i 4.1.6, mogu se i grafički određivati ukupni otpori dva ili više paralelno spojenih otpora (a slično će se moći, kasnije, raditi i s paralelnim induktivitetima, kao što se, takođe, može postupiti i sa redno spojenim kapacitetima, jer se oni računaju slično računanju paralelnih otpora). Ovaj postupak pokazaćemo u trećem primeru.

### 4.1.2. Primeri

**1. primer:** Tri otpornika čiji su otpori $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 5\,\Omega$, $R_3 = 2\,\Omega$ vezana su paralelno. Koliki je ukupni otpor grupe?

Rešenje: Prema obrascu 4.1.6 ukupni otpor iznosi:

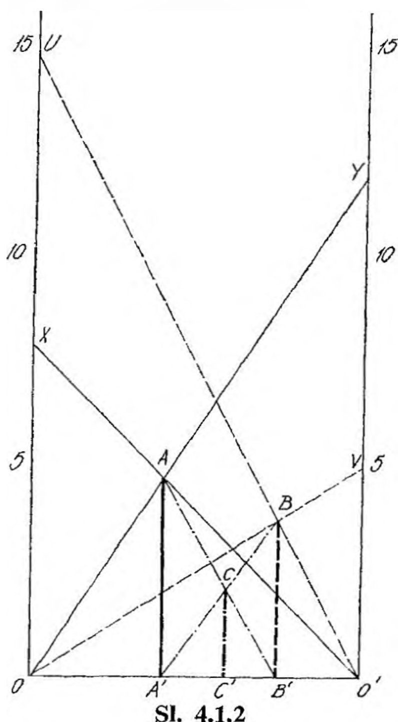
$$R = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3} = \frac{10 \cdot 5 \cdot 2}{10 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 10 \cdot 2} = 1{,}25\,\Omega$$

**2. primer:** Neka je dvadeset sijalica, čiji otpori pojedinačno iznose po $1210\,\Omega$, spojeno paralelno. Koliki je ukupni otpor?

Rešenje: Prema obrascu 4.1.2 dobijamo:

$$R = \frac{R_1}{n} = \frac{1210}{20} = 60{,}5\,\Omega$$

**3. primer:** Četiri otpornika čiji su otpori $R_1 = 8\,\Omega$, $R_2 = 12\,\Omega$, $R_3 = 15\,\Omega$ i $R_4 = 5\,\Omega$, vezana su paralelno. Grafičkim postupkom odrediti ukupni otpor.



Sl. 4.1.2

Rešenje: Postupak, koji nije ništa drugo nego primena sličnosti trouglova, (sl. 4.1.2). Otpor $A'A$ iznosi 4 8 Ω i ekvivalentan je paralelnoj kombinaciji otpora 8 i 12 (uporedi secište $A$ pravaca kroz $O'$ i $X$ i kroz $O$ i $Y$). Otpor $B'B$ iznosi 3,75 Ω, a ekvivalentan je paralelnoj kombinaciji otpora 15 i 5 Ω (uporedi secište $B$ pravca kroz $O'$ i $U$ i kroz $O$ i $V$). Očito bi se konstrukcija lako i dalje nastavila, tako da je $C'C$ rezultantni otpor paralelne kombinacije četiri zadata otpora. Određen je secištem $C$ pravaca kroz tačke $A'$ i $B$ i tačke $B'$ i $A$. Relultantni otpor iznosi 2,1 Ω.

### 4.1.3. **Zadaci za samostalno rešavanje**

1. Sto sijalica od 100 W vezano je paralelno i priključeno na napon 120 V. Koliki je ekvivalentni otpor grupe i kolika je ukupna struja?

2. Otpor dve električne sijalice koje osvetljavaju skalu radio-prijemnika je $R_1 = R_2 = 22{,}5\,\Omega$. Koliki je otpor kola, jačina struje i snaga, ako su sijalice priključene na napon 6 V i ako su spojene paralelno?

3. Dve osvetljene sijalice uključene su paralelno na napon $U = 220$ V. Kolika je struja do tačke grananja, ako je $R_1 = 160\,\Omega$ i $R_2 = 80\,\Omega$?

4. Dva otpora čije su vrednosti $R_1 = 3\ \Omega$ i $R_2 = 5\ \Omega$, vezana su paralelno i priključena na napon $U$. Kolika je struja u drugom otporniku ($I_2$) ako je u prvom $I_1 = 15$ A?

5. Struja od 40 A grana se u tri paralelne grane čiji su otpori 5, 12 i 20 Ω. Odrediti struju u svakoj grani.

6. Dva otpora $R_1$ i $R_2$ vezana su paralelno. Treba ih izabrati tako da se glavna struja $I = 14$ A pod dejstvom potencijalne razlike $U = 112$ V deli kroz njih u odnosu 2 : 5.

7. Ampermetar za $I_A = 3$ A ima unutrašnji otpor $R_A = 0{,}025\ \Omega$. Koliki otpor $R$ treba vezati paralelno da bi ampermetrom merili struju do $I = 50$ A?

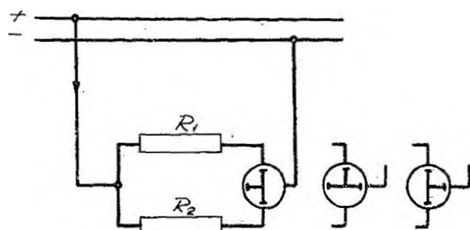
8. U kolo je uključena zavojnica sa $R_1 = 8\ \Omega$. Otpor kola je neophodno smanjiti na veličinu $R_3 = 1{,}6\ \Omega$ uključenjem druge zavojnice s otporom $R_2$, paralelno sa $R_1$. Odrediti veličinu $R_2$.

9. Pri rednom spoju otpora $R_1$ i $R_2$ ukupni otpor je $R_{red} = 10\ \Omega$, a pri paralelnom $R_{par.} = 1{,}6\ \Omega$. Koliki su otpori $R_1$ i $R_2$?

10. Rešiti 9. zadatak pod uslovom da je $R_{red.} = 100\ \Omega$ i $R_{par.} = 10{,}16\ \Omega$.

11. Kolo se sastoji od tri zavojnice izrađene od nihroma ($\varrho = 1{,}1$), cekasa ($\varrho = 1{,}4$) i kantala ($\varrho = 1{,}5$), Dužina svake zavojnice je $l = 1$ m. Prečnik nihromove žice je $d = 1$ mm. Prečnik cekasove žice je dvaput, a kantalove četiri puta manji. Koliki su ukupni otpori kola pri rednom i paralelnom spoju zavojnica?

12. U kolo napona $U = 220$ V uključene su dve sijalice sa žarnom niti čiji su otpori $R_1 = 480\ \Omega$ i $R_2 = 240\ \Omega$ (sl. 4.1.3.). Odrediti snagu svake sijalice i struju sijalica pri svim mogućim položajima prekidača.




Sl. 4.1.3

## 4.2. KOLA S DVA ČVORA

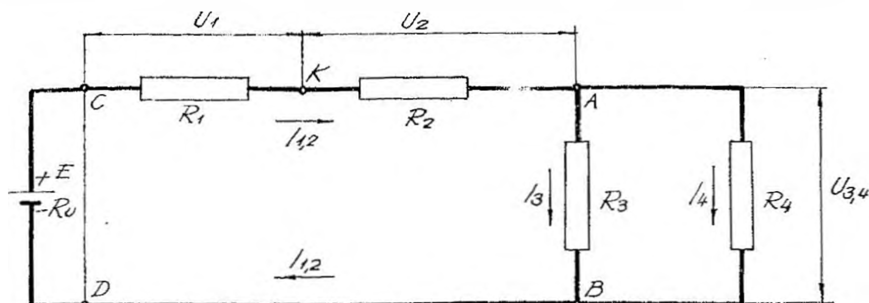
### 4.2.1. **Osnovni pojmovi i formule**

Pri proračunu ovakvih kola (sl. 4.2.1) služićemo se već navedenim formulama.

### 4.2.2. Primeri

**1. primer:** U kolu (sl. 4.2.1.) poznato je $E = 120$ V, $R_u = 2\,\Omega$, $R_1 = 6\,\Omega$, $R_2 = 12\,\Omega$, $R_3 = 100\,\Omega$ i $R_4 = 150\,\Omega$.

Izračunati struje u svim delovima kola, napone na stezaljkama potrošača i izvora, a takođe snagu izvora i snagu svih potrošača.

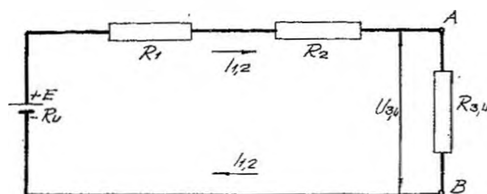



Sl. 4.2.1

Rešenje: Prvo ćemo izračunati ukupni otpor kola i uprostiti šemu. Zamenivši pojedine redne i paralelne otpore ukupnim otporom uprostili smo šemu, odnosno »skratili« šemu. Na taj način dobijamo prosto nerazgranato kolo. Proračun takvog kola je od ranije poznat. Otpore $R_3$ i $R_4$ zamenićemo njihovim ukupnim otporom:

$$R_{3,4} = \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{100 \cdot 150}{100 + 150} = 60\,\Omega$$

Na taj način dobili smo prosto nerazgranato kolo (sl. 4.2.2).




Sl. 4.2.2

Izračunajmo sada struju u uprošćenoj šemi (sl. 4.2.2) prema izrazu 3.1.2:

$$I_{1,2} = \frac{E}{R_u + R_1 + R_2 + R_{3,4}} = \frac{120}{2 + 6 + 12 + 60} = 1{,}5\text{ A}$$

Ponovo se vraćamo na početnu šemu, kako bismo izračunali struje $I_3$ i $I_4$ pomoću izraza 4.1.4 i 4.1.5:

$$I_3 = I_{1,2} \frac{R_4}{R_3 + R_4} = 1,5 \frac{150}{100 + 150} = 0,9 \text{ A}$$

$$I_4 = I_{1,2} \frac{R_3}{R_3 + R_4} = 1,5 \frac{100}{100 + 150} = 0,6 \text{ A}$$

Izračunaćemo napone na svim delovima kola (sl. 4.1.2):

$$U_1 = I_{1,2} \cdot R_1 = 1,5 \cdot 6 = 9 \text{ V}$$

$$U_2 = I_{1,2} \cdot R_2 = 1,5 \cdot 12 = 18 \text{ V}$$

$$U_{3,4} = I_3 \cdot R_3 = 0,9 \cdot 100 = 90 \text{ V}$$

Unutrašnji pad napona je:

$$U_u = I_{1,2} \cdot R_u = 1,5 \cdot 2 = 3 \text{ V}$$

Napon na stezaljkama izvora je:

$$U = E - U_u = 120 - 3 = 117 \text{ V}$$

Kao što se vidi, proračun struje i napona provodimo putem postepenog prelaska od uprošćene šeme ka zadatoj šemi.

Kako ćemo proveriti da li smo pravilno izračunali struje i napone? Tu nam mogu pomoći Kirhofovi zakoni.

Prema prvom Kirhofovom zakonu imamo:

$$I_3 + I_4 = I_{1,2}$$

$$0,9 + 0,6 = 1,5 \text{ A}$$

$$1,5 = 1,5$$

Prema drugom Kirhofovom zakonu (jednačina 3.1.2) imamo:

$$E = U_u + U_1 + U_2 + U_{3,4}$$

$$120 = 3 + 9 + 18 + 90$$

$$120 = 120$$

Izračunajmo sada snage. Izvor struje ima snagu:

$$P_i = E \cdot I_{1,2} = 120 \cdot 1{,}5 = 180 \text{ W}$$

a deo te snage:

$$P_u = I^2_{1,2} \cdot R_u = 1{,}5^2 \cdot 2 = 4{,}5 \text{ W}$$

troši se u samom izvoru. To znači da izvor odaje u spoljno kolo snagu:

$$P = P_i - P_u = 180 - 4{,}5 = 175{,}5 \text{ W}$$

Tu snagu možemo odrediti i pomoću izraza:

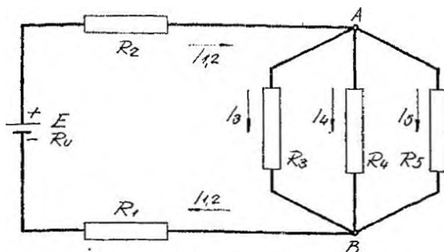
$$P = U \cdot I_{1,2} = 117 \cdot 1{,}5 = 175{,}5 \text{ W}$$

S druge strane imamo:

$$P = (I_{1,2})^2 \cdot R_1 + (I_{1,2})^2 \cdot R_2 + (I_{1,2})^2 \cdot R_{3,4} =$$

$$= (I_{1,2})^2 \cdot (R_1 + R_2 + R_{3,4}) = (1{,}5)^2 \cdot (6 + 12 + 60) = 175{,}5 \text{ W}$$

Da bismo proverili pravilnost proračuna kola, napravimo bilans snage. Snaga koju daje izvor iznosi $P_i - P_u = 175{,}5$ W. Snaga potrošača je takođe $P = 175{,}5$ W. To potvrđuje da je bilans snage pravilan.



**Sl. 4.2.3**

**2. primer:** Kako se određuju struje u kolu s većim brojem paralelno uključenih potrošača? Za odgovor na ovo pitanje izračunajmo struje $I_3$, $I_4$ i $I_5$ (sl. 4.2.3) tri paralelno uključena potrošača s otporima $R_3 = 30\ \Omega$, $R_4 = 20\ \Omega$ i $R_5 = 12\ \Omega$, ako je struja $I_{1,2} = 10$A.

R e š e n j e: Za paralelni spoj ukupni otpor iznosi prema formuli 4.1.6:

$$R_{AB} = \frac{R_3 \cdot R_4 \cdot R_5}{R_3 \cdot R_4 + R_3 \cdot R_5 + R_4 \cdot R_5} =$$

$$= \frac{30 \cdot 20 \cdot 10}{30 \cdot 20 + 30 \cdot 12 + 20 \cdot 12} = 6\ \Omega$$

Napon između čvornih tačaka $A$ i $B$, kao i struje, iznosi:

$$U_{AB} = I_{1,2} \cdot R_{AB} = 10 \cdot 6 = 60 \text{ V}$$

$$I_3 = \frac{U_{AB}}{R_3} = \frac{60}{30} = 2 \text{ A}$$

$$I_4 = \frac{U_{AB}}{R_4} = \frac{60}{20} = 3 \text{ A}$$

$$I_5 = \frac{U_{AB}}{R_5} = \frac{60}{12} = 5 \text{ A}$$

Proverimo još rezultate po prvom Kirhofovom zakonu:

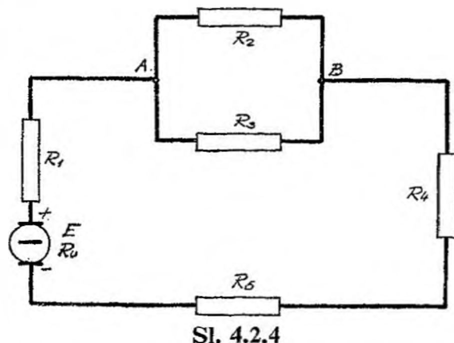
$$I_3 + I_4 + I_5 = 2 + 3 + 5 = 10 \text{ A} = I_{1,2}$$

Kao što se vidi metod određivanja čvornog napona za proračun struja grana daje jasno rešenje zadatka i njegova vrednost raste s povećanjem broja paralelnih grana.

### 4.2.3. Zadaci za samostalno rešavanje

1. Za kolo (sl. 4.2.4) zadato je $E = 50$ V, $R_u = 0{,}1\ \Omega$, $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 0{,}3\ \Omega$, $R_3 = 0{,}2\ \Omega$, $R_4 = 7{,}5\ \Omega$ i $R_5 = 0{,}28\ \Omega$.

Za sve delove kola izračunati struje, napone i snage. Sastaviti bilans snaga.



Sl. 4.2.4

2. Na dva čvora električnog kola spojene su tri grane. U srednjoj grani redno je spojen izvor energije s ems $E = 60$ V, unutrašnjeg otpora $R_u = 0{,}1\ \Omega$ i dva otpora $R_1 = 0{,}4\ \Omega$ i $R_6 = 0{,}5\ \Omega$. Jedna krajnja grana ima tri redno spojena otpora: $R_3 = 2\ \Omega$, $R_4 = 10\ \Omega$, $R_5 = 8\ \Omega$. Druga krajnja grana sastoji se od jednog otpornika $R_2 = 5\ \Omega$. Sastaviti šemu. Odrediti sve struje i napone na stezaljkama izvora i između čvornih tačaka.

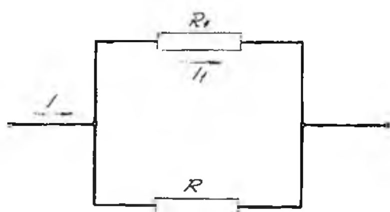
3. Na generator ems $E = 245$ V i unutrašnjeg otpora $R_u = 0{,}5\ \Omega$ preko nadzemnog voda priključeno je opterećenje $R_1$. Provodnici su bakarni, preseka $S = 35$ mm². Dužina voda je $l =$

$= 200$ m. Struja kroz vod je $I = 50$ A. Odrediti napon na stezaljkama generatora, ako se opterećenje ($R_1$) sastoji od 100 električnih sijalica spojenih paralelno i ako je otpor svake sijalice $R = 480\ \Omega$.

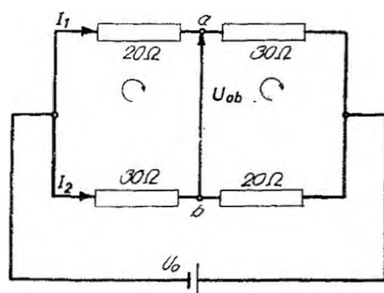
4. Za grejanje trolejbusa upotrebljava se 6 električnih grejalica spojenih u dve paralelne grupe, po tri grejalice u svakoj grupi. Svaka grejalica proračunata je za napon $U = 184$V i snagu $P = 0{,}5$ kW. Kolika je struja kroz svaku grejalicu? Koliki su: otpor grejalice, ukupni otpor kola, struja i snaga?

5. Za osvetljenje trolejbusa upotrebljava se kolo od petnaest sijalica, proračunatih za napon $U = 120$ V i $P = 60$ W. Sijalice su spojene redno u tri grupe po pet sijalica. Napon mreže je $U = 550$ V. Nacrtati šemu! Koliki su otpori svake sijalice i sve tri grupe pri njihovom paralelnom uključivanju na mrežu? Kolike su potrebna struja i snaga?

6. U kolu (sl. 4.2.5) imamo: $I_1 = 100$ mA, $I = 1$ A, $R_1 = 100\ \Omega$. Koliki je otpor $R$?



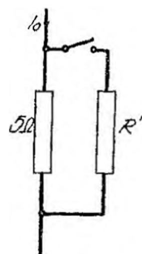
Sl. 4.2.5



Sl. 4.2.6

7. Na slici 4.2.6 svi su otpori dati u omima. Koliki je napon $U_0$, pri kome je napon između tačaka jednak $a$ i $b$ 25 V?

8. Otpor nekog dela kola (sl. 4.2.7) kojim teče struja $I_0$, jednak je 5 Ω. Koliki otpor $R'$ treba uključiti paralelno tom delu, da bi kroz poslednji tekla struja 0,1 $I_0$, pri uslovu da u nerazgranatom delu kola struja ostane ista ($I_0$)?



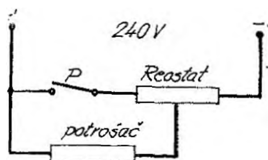
Sl. 4.2.7

9. U kojim granicama reostat s otporom od 80 Ω (sl. 4.2.8) može regulisati napon na potrošaču otpora 40 Ω:

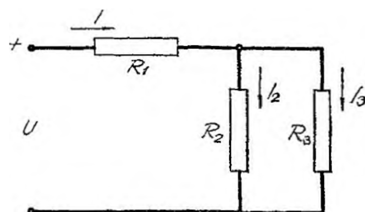
a) pri zatvorenom prekidaču $P$,

b) pri otvorenom prekidaču $P$?

10. Odrediti napon na potrošaču prema šemi na sl. 4.2.8 ako je prekidač $P$ zatvoren, a regulator reostata stoji u srednjem položaju.




Sl. 4.2.8




Sl. 4.2.9

11. U kolu prikazanom na sl. 4.2.9 snaga iznosi $P = 31{,}25$ kW pri naponu $U = 625$ V. Poznati su otpori: $R_2 = 20\ \Omega$ i $R_3 = 30\ \Omega$.

a) Naći struje u granama 2 i 3 i snagu u svakoj od tih grana?

b) Kako se menja snaga $P$, ako se napon uveća za 20% pri istim vrednostima otpora?

12. U kolu prikazanom na sl. 4.2.9 u trećoj grani troši se snaga od 480 W. Poznati su otpori $R_1 = 0{,}5\ \Omega$, $R_2 = 20\ \Omega$ i $R_3 = 30\ \Omega$.

Naći struje u svim granama i snagu celog kola. Za proveru rešenja sastaviti bilans snage.

13. Električno kolo sastoji se od tri grane. U srednjoj grani uključen je izvor energije ems $E = 120$ V i unutrašnjim otporom $R_u = 0{,}3\ \Omega$, a redno s njim $R_3 = 7{,}6\ \Omega$. U jednoj krajnjoj grani uključeni su redno otpori $R_1 = 6{,}6\ \Omega$ i $R_2 = 0{,}4\ \Omega$, a u drugoj krajnjoj grani dva paralelno spojena otpora $R_5 = 3\ \Omega$ i $R_6 = 15\ \Omega$ i redno s njima otpor $R_4 = 0{,}5\ \Omega$.

Nacrtati šemu i izračunati sve struje. Izračunati snage: razvijene u izvoru, odatu u spoljno kolo i utrošenu unutar izvora. Sastaviti bilans tih snaga. Proveriti proračun po Kirhofovim zakonima.

14. Koliki je ukupni otpor kola (sl. 4.2.10) ako je $R_1 = 2{,}5\ \Omega$ $R_2 = R_5 = 60\ \Omega$, $R_3 = 20\ \Omega$ i $R_4 = 13{,}5\ \Omega$.

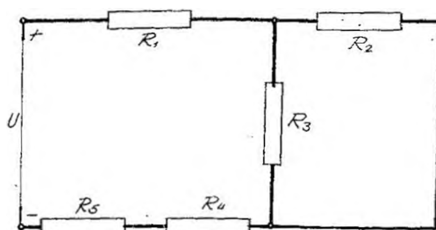
15. Na dve čvorne tačke spojene su četiri grane, koje sadrže:

1) izvor energije ems $E = 12\ V$ i redno uključen otpor $R_1 = 14\ \Omega$,

2) dva redno uključena otpora $R_2 = 8\ \Omega$ i $R_3 = 4\ \Omega$.

3) $R_4 = 30\ \Omega$ i

4) otpor $R_5 = 20\ \Omega$.



Sl. 4.2.10

Nacrtati šemu i označiti smerove struja. Izračunati struje i čvorni napon. Unutrašnji otpor izvora zanemariti.

## 4.3. KOLA S VIŠE ČVOROVA

### 4.3.1. Osnovni pojmovi i formule

I kod proračuna ovakvih kola služićemo se već ranije napisanim formulama.

### 4.3.2. Primeri

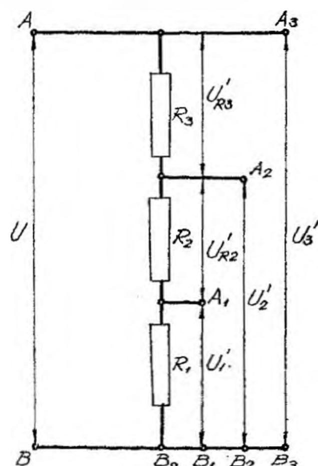
**1. primer:** Za napajanje kola mrežice i katode elektronke potrebno je imati napon $U_1 = 25\ V$, $U_2 = 80\ V$ i $U_3 = 140\ V$, pri strujama opterećenja: $I_1 = 12\ mA$, $I_2 = 8\ mA$ i $I_3 = 30\ mA$. Za ovo napajanje treba uzeti jedan izvor napona 140 V i na njega spojen delitelj napona sa dve vrednosti (25 i 80 V).

Treba sastaviti šemu i izračunati parametre delitelja napona. Napon izvora energije $U = 140\ V$ je isti za režim opterećenja i praznog hoda.

R e š e n j e: Prvo ćemo sastaviti električnu šemu.

Ako na stezaljke izvora energije s naponom $U$ spojimo redno nekoliko otpora, dobićemo na svakom od njih pad napona koji odgovara delu napona $U$. Takvo kolo predstavlja delitelj napona.

Za uslove zadatka delitelj je prikazan na sl. 4.3.1. On ima ulazne stezaljke $A$ i $B$ na koje se dovodi napon izvora $U = 140$ V i tri para izlaznih stezaljki ($A_1$—$B_1$, $A_2$—$B_2$ i $A_3$—$B_3$). Od njih se dobijaju naponi ($U_1'$, $U_2'$ i $U_3'$) za napajanje zadatih potrošača.



Sl. 4.3.1

Šema (sl. 4.3.1) odgovara režimu praznog hoda delitelja napona, jer je na izlaznim stezaljkama isključeno kolo napajanja elektronke. Pri priključenju elektronke, odnosno ekvivalentnih otpora $R_{e1}$, $R_{e2}$ i $R_{e3}$, kao što je prikazano na sl. 4.3.2, smanjuje se ukupni otpor i napon između stezaljki $A_1$—$B_1$ i $A_2$—$B_2$. Zbog toga su naponi $U_1'$ i $U_2'$ (sl. 4.3.1) veći od zadatih napona $U_1$ i $U_2$. Za proračun otpora delitelja napona nužno je koristiti se šemom, koja odgovara normalnim uslovima rada (sl. 4.3.2).

Sada ćemo izračunati ekvivalentne otpore $R_{e1}$, $R_{e2}$ i $R_{e3}$ (sl. 4.3.2). Svaki od ovih otpora zamenjuje kolo napajanja elektronke, spojene na odgovarajuće stezaljke delitelja napona. Za to kolo poznati su naponi i struje tako da je lako izračunati otpore:

$$R_{e1} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{25}{12 \cdot 10^{-3}} = 2080\ \Omega$$

$$R_{e2} = \frac{U_2}{I_2} = \frac{25}{8 \cdot 10^{-3}} = 10000\ \Omega$$

$$R_{e3} = \frac{U_3}{I_3} = \frac{140}{30 \cdot 10^{-3}} = 4670\ \Omega$$

Da bismo zadatak dalje mogli rešavati moramo izabrati jedan od otpora delitelja napona, na primer $R_1$. Praktično se uzima da je $R_1 = (0{,}1—0{,}15)\ R_{e1}$, pa uzmimo da je $R_1 = 250\ \Omega$. Da bismo izračunali $R_2$ i $R_3$ moramo pronaći napone i struje.

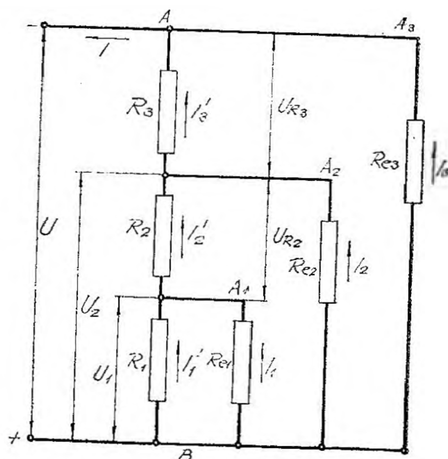
Napon na otporima $R_2$ i $R_3$ (sl. 4.3.2) je:

$U_{R2} = U_2 - U_1 =$

$= 80 - 25 = 55\ \mathrm{V}$

$U_{R3} = U_3 - U_2 =$

$= 140 - 80 = 60\ \mathrm{V}$




Sl. 4.3.2

Zatim određujemo sve struje:

$$I_1' = \frac{U_1}{R_1} = \frac{25}{250} =$$

$= 100\ \mathrm{mA}$

$I_2' = I_1' + I_1 = 100 + 12 =$

$= 112\ \mathrm{mA}$

$I_3' = I_2' + I_2 = 112 + 8 = 120\ \mathrm{mA}$

$I = I_3' + I_3 = 120 + 30 = 120\ \mathrm{mA}$

Otpori $R_2$ i $R_3$ iznose:

$$R_2 = \frac{U_{R2}}{I_2'} = \frac{55}{0{,}112} = 490\ \Omega$$

$$R_3 = \frac{U_{R3}}{I_3'} = \frac{55}{0{,}12} = 500\ \Omega$$

Izvršimo proveru dobi enih rezultata po drugom Kirhofo vom zakonu:

a) Za konturu s otporima $R_1$, $R_2$ i $R_{e2}$ imamo:

$I_1' \cdot R_1 + I_2' \cdot R_2 - I_2 \cdot R_{e2} = 0$

$0{,}1 \cdot 250 + 0{,}112 \cdot 490 - 0{,}008 \cdot 10000 = 0$

b) Za konturu s otporima $R_{e2}$, $R_3$ i $R_{e3}$ imamo:

$I_2 \cdot R_{e2} + I_3' \cdot R_3 - I_3 \cdot R_{e3} = 0$

$0{,}008 \cdot 10^4 + 0{,}12 \cdot 500 - 0{,}03 \cdot 4670 = 80 + 60 - 140 = 0$

Konture smo obilazili u smeru kretanja kazaljke na satu. Pošto ni u jednoj konturi nema izvora, desne strane jednačina jednake su nuli.

Izračunajmo još na kraju ukupni otpor kola. To možemo uraditi na dva načina. Najpre deljenjem napona $U$ sa strujom:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{140}{0,15} = 934\,\Omega$$

Po drugom načinu razmotrimo pojedine delove kola (sl. 4.3.2) Tako za paralelni spoj otpora $R_1$ i $R_{e1}$ nalazimo ukupni otpor:

$$R_{uk1} = \frac{R_1 \cdot R_{e1}}{R + R_{e1}} = \frac{250 \cdot 2080}{250 + 2080} = 223\,\Omega$$

Otpori $R_{uk1}$ i $R_2$ spojeni su redno, a oba paralelno s otporom $R_{e2}$. Zbog toga ukupni otpor između stezaljki $A_2$ i $B$ iznosi (sl. 4.3.2):

$$R_{u2} = \frac{(R_{uk1} + R_2) \cdot R_{e2}}{R_{uk1} + R_2 + R_{e2}} = \frac{(223 + 490) \cdot 10\,000}{223 + 490 + 10\,000} = 666\,\Omega$$

Otpori $R_{uk2}$, $R_3$ i $R_{e3}$ obrazuju redno-paralelni spoj, analogan razmotrenom, zbog čega ukupni otpor između stezaljki $A$ i $B$, odnosno celog kola iznosi:

$$R = \frac{(R_{uk2} + R_3) \cdot R_{e3}}{R_{uk2} + R_3 + R_{e3}} = \frac{(666 + 500) \cdot 4670}{666 + 500 + 4670} = 934\,\Omega$$

**2. primer:** Koliki je ukupni otpor kola prema šemi na sl. 4.3.3? Zadato je: $R_1 = 7\,\Omega$, $R_2 = 0,6\,\Omega$, $R_3 = 2\,\Omega$, $R_4 = 1\,\Omega$, $R_5 = 3\,\Omega$, $R_6 = 4\,\Omega$, $R_7 = 2\,\Omega$, $R_8 = 5\,\Omega$ i $R_9 = 0,5\,\Omega$.

Rešenje: Pri proračunu kola ovakvog oblika obavezno radimo sa zamenskim šemama. Tako granu s otporima $R_3$, $R_4$ i $R_5$ zamenjujemo samo jednim otporom:

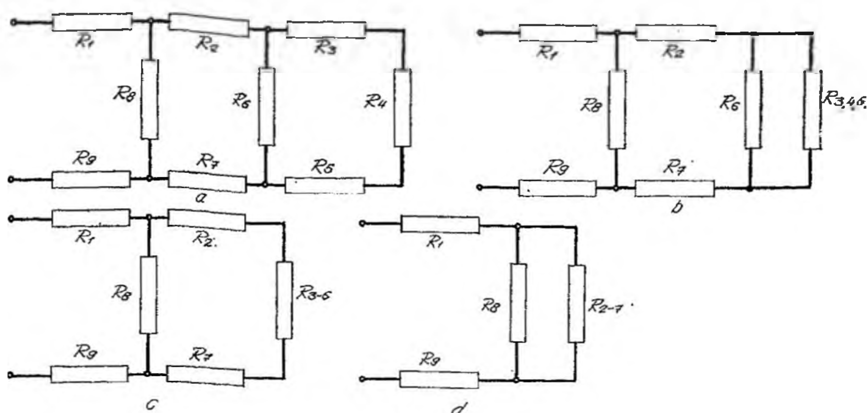
$$R_{3,4,5} = R_3 + R_4 + R_5 = 2 + 1 + 3 = 6\,\Omega$$

Sada smo dobili uprošćenu šemu (sl. 4.3.3b) gde su otpori $R_{3,4,5}$ i $R_6$ spojeni paralelno, tako da ih zamenjujemo otporom

$$R_{3,4,5,6} = \frac{6 \cdot 4}{6 + 4} = 2,4\,\Omega$$

Sastavljajući dalje šemu (sl. 4.3.3c) izračunamo otpor:

$R_{2 \cdots 7} = 0{,}6 + 2{,}4 + 2 = 5\ \Omega$



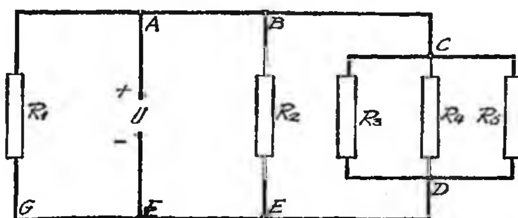

Sl. 4.3.3

Daljim uprošćavanjem šeme (sl. 4.3.3d) određujemo ukupni otpor kola:

$$R = 7 + \frac{5 \cdot 5}{5 + 5} + 0{,}5 = 10\ \Omega$$

### 4.3.3. Zadaci za samostalno rešavanje

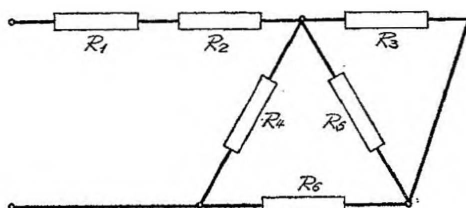
1. Za kolo na sl. 4.3.4 zadato je: $U = 120\ \mathrm{V}$ i $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 120\ \Omega$. Odrediti broj čvornih tačaka, ukupni otpor kola, sve struje i napone između čvorova. Izvršiti proveru




Sl. 4.3.4

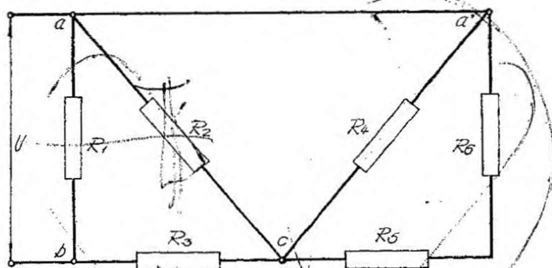
rezultata po drugom Kirhofovom zakonu za konture *ABCDEFA*, *AFGA* i *ABEFGA*.

2. Napisati israz za ukupni otpor kola (sl. 4.3.5) i izračunati ga, ako je $R_1 = R_2 = R_3 = R_5 = 5{,}5\ \Omega$, $R_4 = 12\ \Omega$, $R_6 = 3{,}25\ \Omega$.



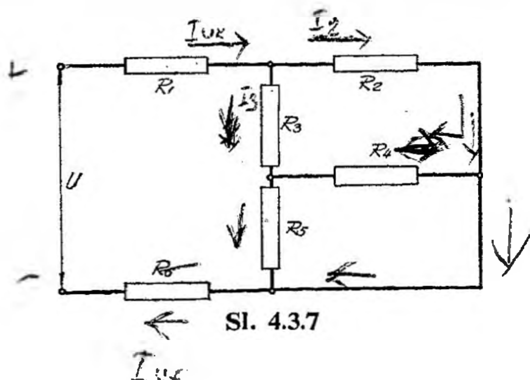

Sl. 4.3.5

3. Koliki je ukupni otpor kola (sl. 4.3.6), ako je $R_1 = R_4 = 60\ \Omega$, $R_2 = R_5 = 40\ \Omega$, $R_3 = 10\ \Omega$ i $R_6 = 80\ \Omega$?



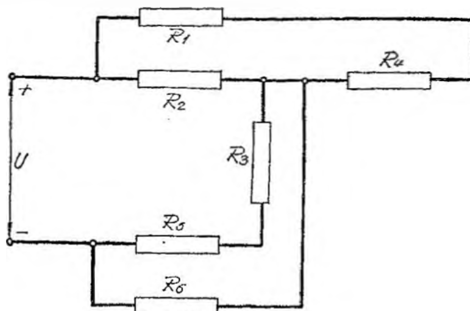

Sl. 4.3.6

4. Odrediti sve struje u kolu (sl. 4.3.7) ako je $U = 120\ V$, $R_1 = R_6 = 4{,}5\ \Omega$, $R_2 = 22\ \Omega$, $R_3 = 7{,}6\ \Omega$, $R_4 = 24\ \Omega$ i $R_5 = 36\ \Omega$.



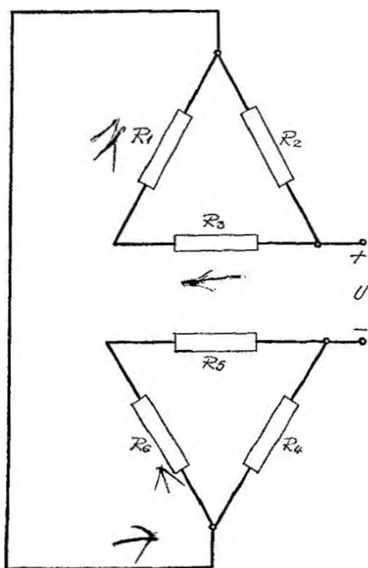

Sl. 4.3.7

5. Napisati izraz za ukupni otpor kola (sl. 4.3.8) i izračunati sve struje, ako je $U = 36\,V$, $R_1 = R_4 = 400\,\Omega$, $R_2 = 0{,}8\,k\Omega$, $R_3 = 1{,}8\,k\Omega$, $R_5 = 1{,}2\,k\Omega$ i $R_6 = 2\,k\Omega$.



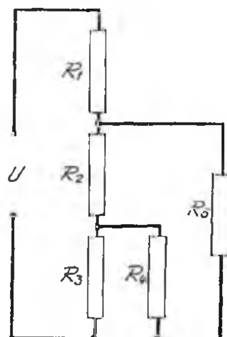

Sl. 4.3.8

6. Za kolo prikazano na sl. 4.3.9 zadato je: $U = 4{,}4\,V$, $R_1 = 4\,\Omega$, $R_2 = R_4 = 12\,\Omega$, $R_3 = 2\,\Omega$, $R_5 = 3{,}5\,\Omega$ i $R_6 = 4{,}5\,\Omega$. Izračunati struje u svim otporima i ukupnu struju.




Sl. 4.3.9

7. Otpori $R_1 = R_3 = 400\,\Omega$ i $R_2 = 200\,\Omega$ (sl. 4.3.10) obrazuju delitelj napona, spojen na izvor energije s naponom $U = 80\,V$. Ekvivalentni otpori spojeni na delitelj su $R_4 = 1{,}2\,k\Omega$ i $R_5 = 2\,k\Omega$.



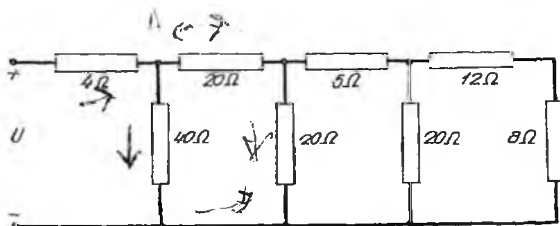

Sl. 4.3.10

Koliki su ems $E$ izvora energije i njegov unutrašnji otpor $R_u$, pri kojim se napon $U$ na stezaljkama menja za 10% pri isključenju otpora $R_5$?

8. U šemi na sl. 4.3.11 (otpori su dati u omima) odrediti:

1) struju u otporu 40 Ω pri $U = 310$ V,

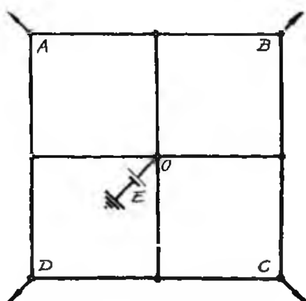
2) pri kojem naponu $U$ struja u otporu 8 Ω ima vrednost 1 A.



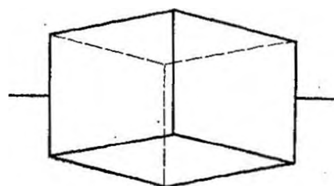

Sl. 4.3.11

9. Električna mreža grada ima oblik kvadratne mreže (sl. 4.3.12). Otpor svake strane je po 1 Ω. U centru mreže (tačka $O$) nalazi se izvor. Napon izvora prema zemlji je 660 V. U četiri vrha: $A$, $B$, $C$ i $D$, mreža je opterećena istim strujama od 20 A.

Odrediti napon tih vrhova u odnosu na zemlju.



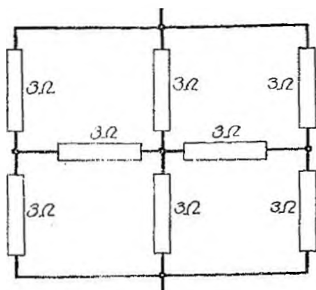

Sl. 4.3.12



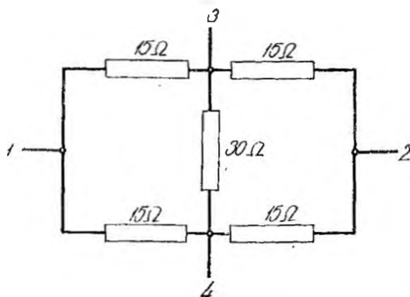
Sl. 4.3.13

10. Koliki je otpor kostura kocke u kojoj svaka strana ima otpor od 1 Ω i to: a) pri ulazu i izlazu struje na polovini suprotnih strana (sl. 4.3.13) i b) pri ulazu i izlazu struje na suprotnim vrhovima?

11. Na sl. 4.3.14 prikazan je spoj jednakih otpornika od kojih svaki ima otpor po 3 Ω. Koliki je ukupni otpor?



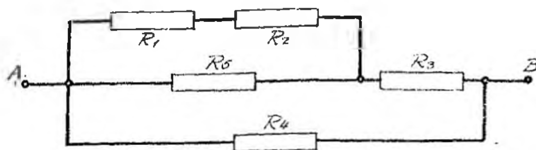

Sl. 4.3.14




Sl. 4.3.15

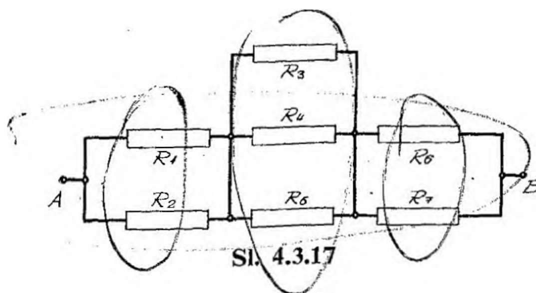
12. Koliki otpor ima spoj na sl. 4.3.15 između tačaka 1 i 2, i koliki između tačaka 3 i 4?

13. Odrediti otpor $R_{AB}$ šeme, prikazane na sl. 4.3.16, ako je $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $R_3 = 0{,}25\,\Omega$ $R_4 = 4\,\Omega$ i $R_5 = 1\,\Omega$.



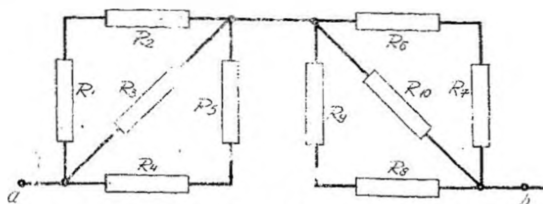

Sl. 4.3.16

14. U kolu (sl. 4.3.17) su uključeni otpori: $R_1 = 4\,\Omega$, $R_2 = 6\,\Omega$, $R_3 = 8\,\Omega$, $R_4 = 8\,\Omega$, $R_5 = 4\,\Omega$, $R_6 = 20\,\Omega$ i $R_7 = 5\,\Omega$. Koliki je otpor $R_{AB}$?



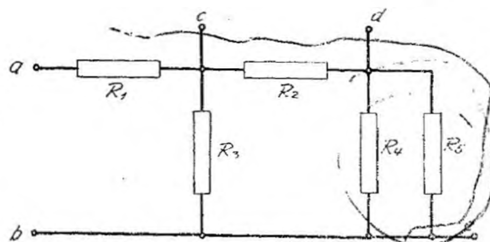

Sl. 4.3.17

15. Koliki je otpor šeme na sl. 4.3.18, ako je: $R_1 = 7\,\Omega$, $R_2 = 3\,\Omega$, $R_3 = 3{,}75\,\Omega$, $R_4 = 1{,}25\,\Omega$, $R_5 = 5\,\Omega$, $R_6 = 2{,}5\,\Omega$, $R_7 = 3{,}5\,\Omega$, $R_8 = 3{,}9\,\Omega$, $R_9 = 13\,\Omega$ i $R_{10} = 4\,\Omega$?



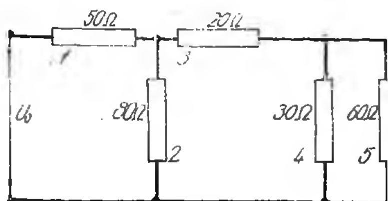
Sl. 4.3.18

16. Odrediti otpore $R_{AB}$, $R_{CD}$ i $R_{DE}$ na šemi (sl. 4.3.19) uzevši da je: $R_1 = 20\,\Omega$, $R_2 = 6\,\Omega$, $R_3 = 10\,\Omega$, $R_4 = 20\,\Omega$, i $R_5 = 5\,\Omega$.

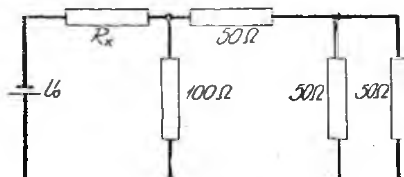


Sl. 4.3.19

17. Na šemi (sl. 4.3.20) svi otpori su dati u omima. Struja u otporu $R_4$ je $I_4 = 0{,}2$ A. Odrediti napon izvora i snagu odatu u kolo?



Sl 4.3.20



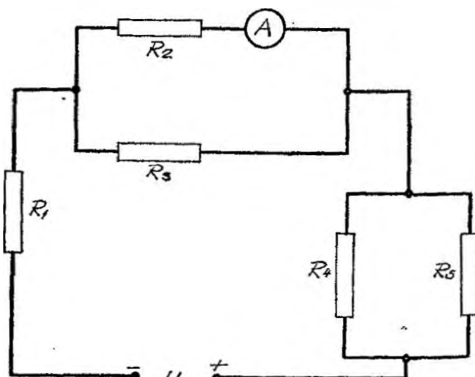
Sl. 4.3.21

18. Za šemu iz 17. zadatka dat je napon $U_0 = 50$ V. Koliki su: struja $I_4$ kroz otpor $R_4$ i ukupna snaga?

19. Na šemi prikazanoj na sl. 4.3.21 svi otpori dati su u omima. Napon $U_0 = 200$ V, a snaga odata u kolu je $P = 400$ W. Odredi otpor $R_x$.

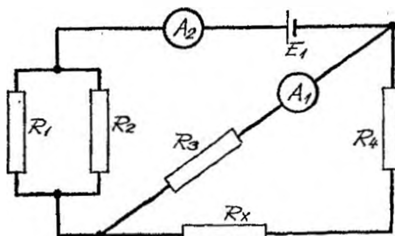
20. U kolu pokazanom na sl. 4.3.22 ampermetar pokazuje struju 0,5 mA. Koliki je napon na stezaljkama izvora, ako je: $R_1 = 600\ \Omega$, $R_2 = 6\ k\Omega$, $R_3 = 2\ k\Omega$, $R_4 = 1\ k\Omega$ i $R_5 = 4\ k\Omega$?

21. Na stezaljkama izvora energije s unutrašnjim otporom $R_u = 0{,}8\ \Omega$ spojene su dve grane. U jednoj od njih nepoznat je otpor $R_x$, kroz koji protiče struja $I = 0{,}5$ A. U drugoj grani spojena su tri otpora: $R_2 = 24\ \Omega$, $R_3 = 10\ \Omega$ i $R_4 = 15\ \Omega$ pri čemu su $R_3$ i $R_4$ uključeni paralelno, a $R_2$ njima redno.



Sl. 4.3.22

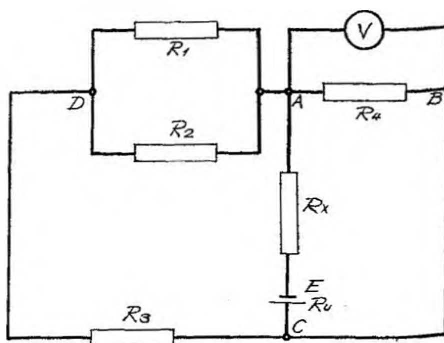
Odrediti otpor $R_x$ i ems izvora, ako pad napona na otporu $R_3$ iznosi 12 V.



Sl. 4.3.23

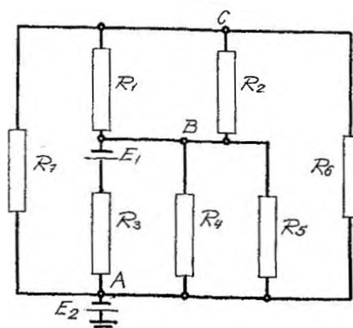
22. Ampermetri $A_1$ i $A_2$ (sl. 4.3.23) pokazuju struje 1,6 i 2,4 mA. Koliki je otpor $R_x$ i ems izvora energije ako je: $R_1 = R_2 = 5\ k\Omega$, $R_3 = 1{,}5\ k\Omega$ i $R_4 = 2\ k\Omega$? Unutrašnji otpor izvora i otpore ampermetra zanemariti.

23. U kolu prikazanom na sl. 4.3.24 voltmetar pokazuje napon 110 V. Koliki je otpor $R_x$ i struje u svim delovima kola, ako je ems izvora 127 V, njegov unutrašnji otpor $R_u = 2\ \Omega$ i otpori: $R_1 = 120\ \Omega$, $R_2 = 60\ \Omega$, $R_3 = 70\ \Omega$ i $R_4 = 275\ \Omega$? Otpor voltmetra uzeti beskonačno veliki.



Sl. 4.3.24

24. Za kolo (sl. 4.3.25) zadato je: $E_1 = E_2 = 4{,}8\ \mathrm{V}$, $R_1 = R_2 = 960\ \Omega$, $R_3 = 260\ \Omega$, $R_4 = R_5 = 720\ \Omega$, $R_6 = 600\ \Omega$ i $R_7 =$




Sl. 4.3.25

$= 400\ \Omega$, unutrašnji otpori: $R_{u1} = R_{u2} = 0$. Izračunati sve struje i potencijale tačaka *A*, *B*, *C*.

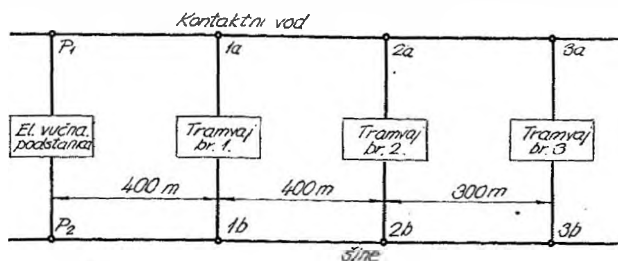
## 4.4. KOLA S VIŠE ČVOROVA UZIMAJUĆI U OBZIR I PADOVE NAPONA U PROVODNICIMA

### 4.4.1. Osnovni pojmovi i formule

Postupak pri rešavanju ovakvih kola pokazaćemo na primeru.

### 4.4.2. Primeri

**1. primer:** Tri tramvaja (sl. 4.4.1) napajaju se iz elektrovučne podstanice električnom energijom preko kontaktnog pro-




Sl. 4.4.1

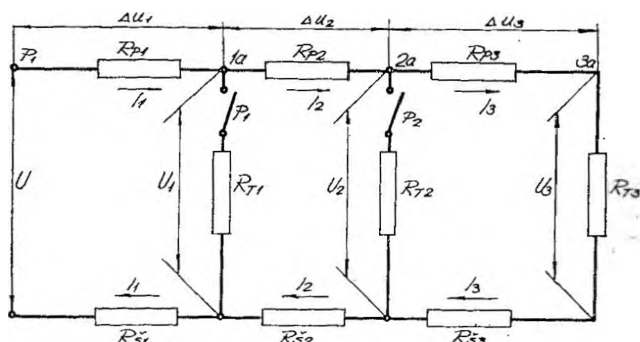
vodnika i šina (povratni provodnik). Bakarni kontaktni provodnik ima presek $82\ \mathrm{mm}^2$, a otpor šina je $0{,}025\ \Omega/\mathrm{km}$.

Izračunati napon na stezaljkama $P_1—P_2$ podstanice, koji se održava konstantnim, napon svakog tramvaja i gubitke napona na svim delovima linije za dva režima rada:

a) Tramvaji br. 1 i 2 stoje na stanici (isključeni su sa mreže), a tramvaj br. 3 nalazi se u kretanju i njegova struja je $I_3 = 70$ A. Napon tramvaja br. 1 (između tački 1a i 1b) je 573 V.

b) Tramvaji br. 1 i 2 polaze sa stanice (njihova struja $I_1 = I_2 = 200$ A), a struja tramvaja br. 3 ostaje ista.

Rešenje: Prvo ćemo sastaviti električnu šemu, tako da sve potrošače zamenimo njihovim ekvivalentnim otporima. Za dato kolo zamenimo kontaktni provodnik, šine i tramvaje njihovim ekvivalentnim otporom $R_p$, $R_s$ i $R_r$ (sl. 4.4.2). Sada ćemo računati otpore.



Sl. 4.4.2

Otpor 1 km kontaktnog provodnika iznosi:

$$R_p = \frac{\varrho \cdot l}{S} = \frac{0{,}0175 \cdot 1000}{82} = 0{,}215\ \Omega$$

Znajući dužine delova kontaktnog provodnika (sl. 4.4.1) izračunavamo sve otpore $R_p$ (sl. 4.4.2):

$$R_{p1} = R_{p2} = R_p \cdot 0{,}4 = 0{,}215 \cdot 0{,}4 = 0{,}086\ \Omega$$

$$R_{p3} = R_p \cdot 0{,}3 = 0{,}215 \cdot 0{,}3 = 0{,}0645\ \Omega$$

Za delove čeličnih šina otpori iznose:

$$R_{š1} = R_{š2} = R \cdot 0{,}4 = 0{,}025 \cdot 0{,}4 = 0{,}01\ \Omega$$

$$R_{š3} = R_š \cdot 0{,}3 = 0{,}025 \cdot 0{,}3 = 0{,}0075\ \Omega$$

Sada ćemo izračunati napone u kolu (sl. 4.4.2) za prvi režim rada. Pri tom režimu iz kola su isključeni otpori $R_{T1}$ i $R_{T2}$ (prekidači $P_1$ i $P_2$ su otvoreni). Tako smo dobili nerazgranato kolo, kod kojeg je struja u svim delovima jednaka 70 A, odnosno jednaka struji tramvaja br. 3.

Struja $I_3 = 70$ A stvara na otporima $R_{p1}$ i $R_{šl}$ pad napona:

$$\Delta U_1 = I_3 (R_{p1} + R_{šl}) = 70\,(0{,}086 + 0{,}01) = 6{,}7 \text{ V}$$

Znajući napon $U_1$ (između tačaka 1 a i 1 b) napon na stezaljkama $P_1$—$P_2$ iznosi:

$$U = U_1 + \Delta U_1 = 573 + 6{,}7 = 579{,}7 \approx 580 \text{ V}$$

Pošto su otpori $R_{p1} = R_{p2}$ i $R_{š1} = R_{š2}$, to je i

$\Delta U_2 = \Delta U_1 = 6{,}7$ V, pa je napon $U_2$:

$$U_2 = U_1 - \Delta U_2 = 573 - 6{,}7 = 566{,}3 \approx 566 \text{ V}$$

Padovi napona na trećem delu iznose:

$$\Delta U_3 = I_3 (R_{p3} + R_{š3}) = 70\,(0{,}0645 + 0{,}0075) = 5 \text{ V}$$

pa je napon:

$$U_3 = U_2 - \Delta U_3 = 566{,}3 - 5 = 561{,}3 \approx 561 \text{ V}$$

Ukupni padovi napona u liniji su:

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3 = 6{,}7 + 6{,}7 + 5 = 18{,}4 \text{ V}$$

odnosno:

$$\Delta U = U - U_3 = 579{,}7 - 561{,}3 = 18{,}4 \text{ V}$$

Sada ćemo izračunati napon za drugi režim rada, U ovom režimu na mrežu su priključeni svi potrošači. Otpori ostaju isti, a struje se na pvim deonicama povećavaju, a time i padovi napona. Pad napona na prvoj deonici je:

$$\Delta U_1' = (I_1 + I_2 + I_3) \cdot (R_{p1} + R_{š1}) =$$

$$= (200 + 200 + 70)\,(0{,}086 + 0{,}01) = 45 \text{ V}$$

a pad napona na drugoj deonici je:

$$\Delta U_2' = (I_2 + I_3) \cdot (R_{p2} + R_{š2}) =$$
$$= (200 + 70)(0{,}086 + 0{,}01) = 26\ \text{V}$$

Pad napona na trećoj deonici ostaje isti, odnosno $\Delta U_3' = \Delta U_3 = 5$ V

Prema tome naponi na potrošačima su:

$$U_1 = U - \Delta U_1' = 580 - 45 = 535\ \text{V}$$

$$U_2 = U_1 - \Delta U_2' = 535 - 26 = 509\ \text{V}$$

$$U_3 = U_2 - \Delta U_3' = 509 - 5 = 504\ \text{V}$$

### 4.4.3. Zadaci za samostalno rešavanje

Preko dvostrukog aluminijumskog voda, prečnika provodnika 4 mm i dužine 1 km, napaja se motor napona $U_2 = 450$ V. Napon na početku voda je $U_1 = 500$ V.

Nacrtati šemu kola i odrediti padove napona, struju voda, kao i snagu potrošača.

2. Za koliko volti se može smanjiti napon generatora iz prvog zadatka, priključenog na početak voda, ako zamenimo aluminijumski provodnik bakarnim i ako režim rada motora ostane isti?

3. Padovi napona u vodu, preko koga se napaja motor snage $P_1 = 10$ kW, iznose 20 V. Posle zamene motorom veće snage ($P_2 = 16$ kW) promeniće se napon generatora (na početku voda), jer napon na kraju voda ostaje isti. Odrediti za koliko se volti promenio napon na početku voda i za koliko puta su se promenili padovi napona u vodu. Smatrati da je otpor voda mnogo manji od otpora motora.

4. Na deonici dvostruke trolejbuske linije nalaze se četiri trolejbusa na rastojanju 380 m jedan od drugog. Struja svakog trolejbusa je 145 A.

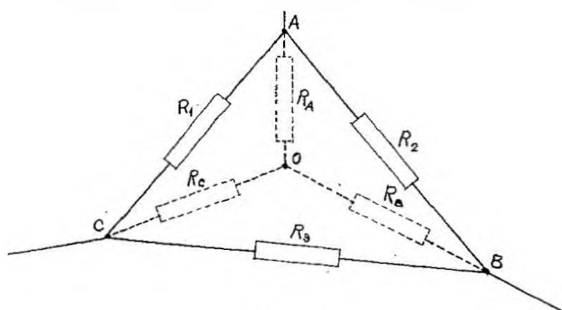
Izračunati napon mreže u drugom, trećem i četvrtom trolejbusu, ako je napon na kontaktima prvog trolejbusa gde se ujedno nalazi elektrovučna podstanica 600 V, a otpor kontaktnog voda je 0,22 Ω/km.

# 5. RAZNE METODE REŠAVANJA RAZGRANATIH KOLA JEDNOSMERNE STRUJE

## 5.1. PRORAČUN KOLA PRIMENOM METODE PRETVARANJA

### 5.1.1. Osnovni pojmovi i formule

Suština ovog metoda sastoji se u tome da se spoj otpora u trouglu pretvori u spoj u zvezdu (sl. 5.1.1).




**Sl. 5.1.1**

Za pretvaranje služe sledeće formule:

$$R_A = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{5.1.1}$$

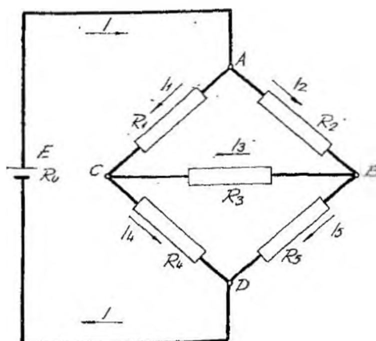
$$R_B = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{5.1.2}$$

$$R_C = \frac{R_3 \cdot R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{5.1.3}$$

ili rečima: otpor kraka zvezde dobija se deljenjem proizvoda zahvatnih otpora krakova trougla s obilaznim otporom trougla ($R_0 = R_1 + R_2 + R_3$ se često naziva obilazni otpor trougla).

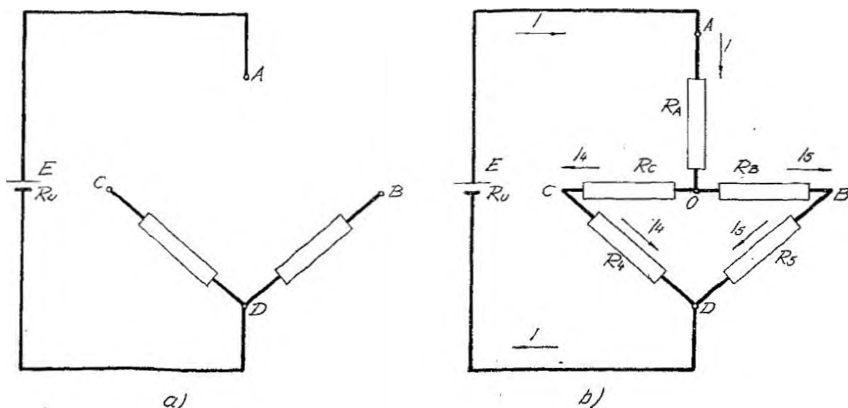
### 5.1.2. **Primer**

**1. primer:** Za kolo (sl. 5.1.2) zadato je $E = 3{,}6$ V, $R_u = 0{,}12\ \Omega$, $R_1 = 8\ \Omega$, $R_2 = 10\ \Omega$, $R_3 = 2\ \Omega$, $R_4 = 4\ \Omega$ i $R_5 = 5\ \Omega$. Izračunati sve struje.




**Sl. 5.1.2**

Rešenje: Pre svega, nacrtamo ponovo šemu bez trougla otpora, ali sa označenim vrhovima *A*, *B*, *C* (sl. 5.1.3 a). Zatim na




**Sl. 5.1.3**

te vrhove spojimo zvezdu otpora $R_A$, $R_B$ $R_C$ (sl. 5.1.3 b) čije vrednosti računamo prema izrazima 5.1.1, 5.1.2, 5.1.3.

$$R_A = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{8 \cdot 10}{8 + 10 + 2} = 4\,\Omega$$

$$R_B = \frac{R_3 \cdot R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{10 \cdot 2}{8 + 10 + 2} = 1\,\Omega$$

$$R_C = \frac{R_3 \cdot R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{2 \cdot 8}{8 + 10 + 2} = 0{,}8\,\Omega$$

Dalji proračun ekvivalentne šeme po sl. 5.1.3 b radimo prema već poznatim metodama. Prema tome, otpor $R_C$ spojen je redno s $R_4$, a otpor $R_B$ redno s $R_5$.

Za granu $OCD$ ukupni otpor je:

$$R_{C,4} = R_C + R_4 = 0{,}8 + 4 = 4{,}8\,\Omega$$

a za granu $OBD$:

$$R_{B,5} = R_B + R_5 = 1 + 5 = 6\,\Omega$$

Otpori $R_{C,4}$ i $R_{B,5}$ spojeni su paralelno i njihov paralelni otpor je:

$$R_{OD} = \frac{4{,}8 \cdot 6}{4{,}8 + 6} = 2{,}67\,\Omega$$

Ukupni otpor celog kola je:

$$R = R_A + R_{OD} = 4 + 2{,}67 = 6{,}67\,\Omega$$

Sada ćemo izračunati struje u kolu.

Prvo, struja izvora je:

$$I = \frac{E}{R + R_u} = \frac{3{,}6}{6{,}67 + 0{,}12} = 0{,}53\,A$$

Struja grane $OCD$ je prema izrazu 4.1.4:

$$I_4 = I\frac{R_{B,5}}{R_{B,5} + R_{C,4}} = 0{,}53\frac{6}{6 + 4{,}8} = 0{,}295\,\text{A}$$

a struja grane $OBD$ je:

$$I_5 = I - I_4 = 0{,}53 - 0{,}295 = 0{,}235\,\text{A}$$

Da bismo izračunali ostale struje vratimo se na prvobitnu šemu (sl. 5.1.2) i napišimo jednačinu po drugom Kirhofovom zakonu za konturu $BCD$ (smer struje uzimamo proizvoljno kako je naznačeno na slici):

$$-I_3 R_3 + I_5 R_5 - I_4 R_4 = 0$$

i uvrstimo brojčane vrednosti, pa ćemo dobiti:

$$-I_3 \cdot 2 + 0{,}235 \cdot 5 - 0{,}295 \cdot 4 = 0 \text{ ili}$$

$$2I_3 \approx 0{,}12 - 0{,}12 = 0, \text{ tj. } I_3 = 0$$

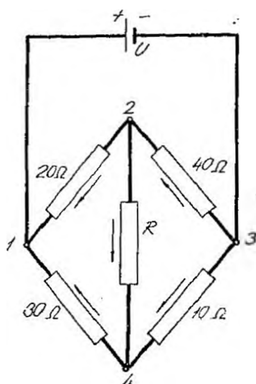
Po prvom Kirhofovom zakonu imamo:

$$I_1 = I_4 - I_3 = 0{,}295 - 0 = 0{,}295\,A$$

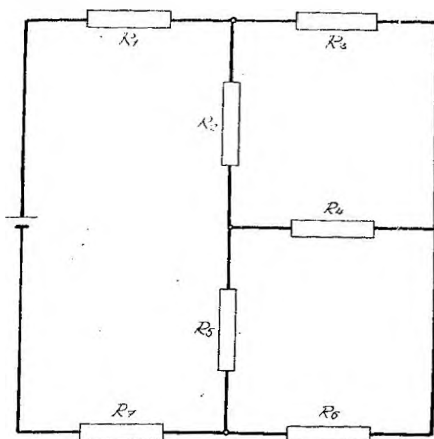
$$I_2 = I_3 + I_5 = 0 + 0{,}235 = 0{,}235\,A$$

### 5.1.3. Zadaci za samostalno rešavanje

1. Data je šema mosta (sl. 5.1.4). Otpori u omima dati su na slici, a otpor dijagonale je $R = 50\Omega$. Napon izvora je $U = 10$ V. Kolika je struja u dijagonali mosta?



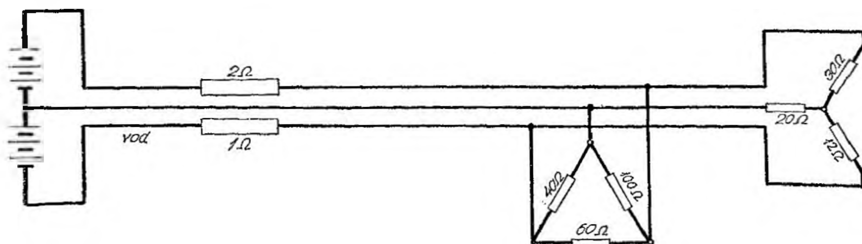
Sl. 5.1.4



Sl. 5.1.5

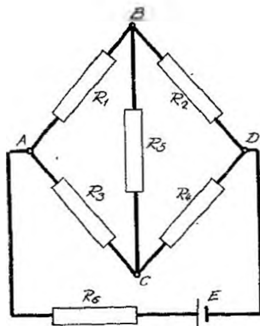
2. Za kolo (sl. 5.1.5) izračunati sve struje pretvaranjem trougla otpora $R_2, R_3$, $R_4$ u zvezdu ($R_u = 0$). Zadato je: $E = 12$ V, $R_1 = 2\,\Omega$, $R_2 = 4\,\Omega$, $R_3 = 10\,\Omega$, $R_4 = 60\,\Omega$, $R_5 = 22\,\Omega$, $R_6 = 55\,\Omega$, $R_7 = 11\,\Omega$.

3. Akumulatorska baterija napaja trovodnu liniju (sl. 5.1.6). Krajnji vodovi imaju otpor po 3 Ω, a srednji 10 Ω. Svaka polovina baterije ima napon 40 V. Na kraju voda uključeni su potrošači čiji su otpori dati na slici. Pretvaranjem trougla u zvezdu naći struju u srednjem vodu.

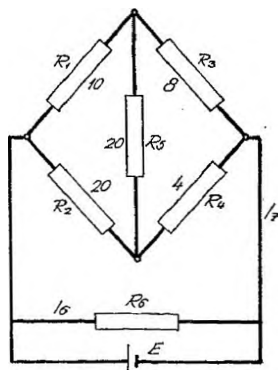



Sl. 5.1.6

4. Kolika je struja u dijagonali neuravnoteženog mosta na sl. 5.1.7? Zadato je: $R_1 = 110\ \Omega$, $R_2 = 100\ \Omega$, $R_3 = 90\ \Omega$, $R_4 = 95\ \Omega$ i $R_5 = 200\ \Omega$. Napon $U_{AD} = 12$ V.



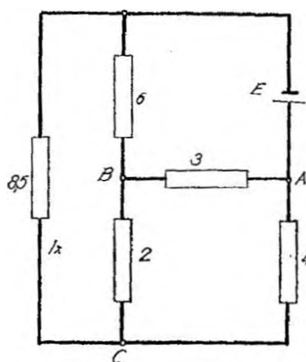

Sl. 5.1.7



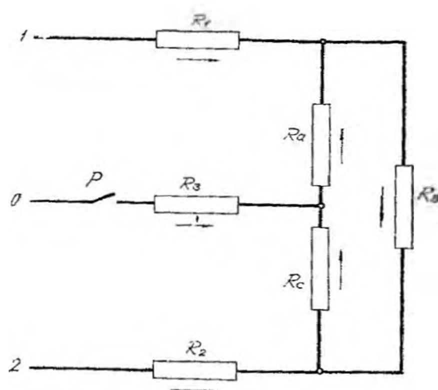

Sl. 5.1.8

5. Kolo prikazano na sl. 5.1.8 napaja se od izvora energije čija je ems $E = 1$ V. Otpori u omima označeni su na slici, sem otpora $R_6$, odabranog tako da su struje $I_6$ i $I_7$ jednake. Naći $R_6$ i sve struje.

6. Naći pretvaranjem trougla $A$, $B$, $C$ u zvezdu struju $I_x$ na šemi prikazanoj na sl. 5.1.9 ako je $E = 24$ V, a otpori grana dati su u omima na slici.




Sl. 5.1.9




Sl. 5.1.10

7. Kolo prikazano na sl. 5.1.10 napaja se iz izvora jednosmerne struje preko trovodne linije. Kolike su sve struje pri zatvorenom i otvorenom prekidaču $P$, ako je: $U_{01} = -U_{02} = 120$ V, $R_1 = R_2 = R_3 = 10\ \Omega$, $R_A = 25\ \Omega$, $R_B = 50\ \Omega$ i $R_C = 50\ \Omega$?

## 5.2. METOD SUPERPOZICIJE

### 5.2.1. **Osnovni pojmovi i formule**

Prilikom proračuna ovom metodom držimo se sledećeg redosleda:

a) Sastavljamo toliko šema koliko u zadatoj šemi ima izvora električne struje, pri čemu u svakoj šemi ostavljamo samo jedan izvor, a ostale izostavimo i zamenimo njihovim unutrašnjim otporom (ako on postoji).

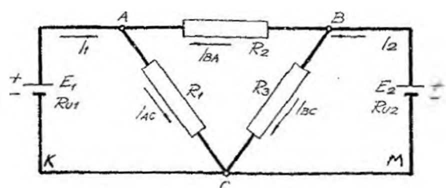
b) Za svaku šemu određujemo ekvivalentni otpor, ukupnu struju na izlazu kola i struje u granama.

c) Stvarnu vrednost struje na izlazu kola i u granama dobijemo kao algebarsku sumu struja, tj. superpozicijom struja u svim šemama.

### 5.2.2. Primeri

**1. primer:** Za kolo na sl. 5.2.1 treba odrediti struje u svim granama između čvornih tačaka $A$, $B$ i $C$ pri sledećim vrednostima:

$R_1 = R_3 = 2\,\Omega$, $R_2 = 1{,}6\,\Omega$, $E_1 = 3{,}6\,\text{V}$, $E_2 = 4{,}8\,\text{V}$ i $R_{u1} = R_{u2} = 0{,}5\,\Omega$



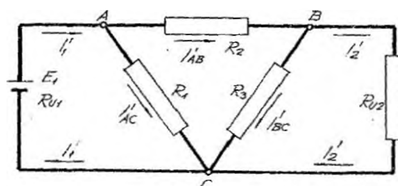

Sl. 5.2.1

R e š e n j e: Kako u zadatoj šemi imamo dva izvora, imaćemo i dve šeme (sl. 5.2.2 i 5.2.3). Sada računamo delimične struje. Za kolo sa ems $E_1$ (sl. 5.2.2).

Izračunajmo prvo ukupni otpor.

Otpor dela $BC$ je:

$$R_{BC}' = \frac{R_3 \cdot R_{u2}}{R_3 + R_{u2}} = \frac{2 \cdot 0{,}5}{2 + 0{,}5} = 0{,}4\,\Omega$$




Sl. 5.2.2

Ovaj otpor spojen je redno s otporom $R_2$ pa je:

$$R_{ABC}' = R_2 + R_{BC}' = 1{,}6 + 0{,}4 = 2\,\Omega$$

Dva jednaka otpora $R'_{ABC}$ i $R_1$ spojena su paralelno, pa je ukupni otpor spoljnog kola:

$$R_{AC}' = \frac{R_1}{2} = \frac{2}{2} = 1\,\Omega.$$

Struja izvora je:

$$I_1' = \frac{E_1}{R_{u1} + R_{AC}'} = \frac{3{,}6}{1{,}5} = 2{,}4\,\text{A}$$

Ova struja u čvoru $A$ grana se u dve jednake struje:

$$I'_{AB} = I_{AC}' = \frac{I_1'}{2} = 1{,}2 \text{ A}$$

Struja $I_{AB}'$ grana se u čvornoj tački $B$ na struje:

$$I_2' = I_{AB}' \frac{R_3}{R_{u2} + R_3} = 1{,}2 \frac{2}{2{,}5} = 0{,}96 \text{ A} \quad \text{i}$$

$$I_{BC}' = I_{AB}' - I_2' = 1{,}2 - 0{,}96 = 0{,}24 \text{ A}$$

Za kolo sa ems $E_2$ (sl. 5.2.3) imamo analogno:

$$R''_{AC} = \frac{R_1 \cdot R_{u1}}{R_1 + R_{u1}} =$$

$$= \frac{2 \cdot 0{,}5}{2 + 0{,}5} = 0{,}4 \ \Omega$$

$$R''_{BAC} = R_2 + R_{AC}'' =$$

$$= 1{,}6 + 0{,}4 = 2 \ \Omega$$

Sl. 5.2.3

$$R''_{BC} = \frac{R''_{BAC}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \ \Omega, \quad \text{jer je } R_3 = R''_{BAC}$$

U grani izvora sa ems $E_2$ struja je:

$$I_2'' = \frac{E_2}{R_{BC}'' + R_{u2}} = \frac{4{,}8}{1{,}5} = 3{,}2 \text{ A}$$

Pošto je $R''_{BAC} = R_3 = 2 \ \Omega$, to je:

$$I_{BA}'' = I_{AC}'' = \frac{I_2''}{2} = \frac{3{,}2}{2} = 1{,}6 \text{ A}$$

Struje u paralelnim granama dela $AC$ iznose:

$$I_1'' = I_{BA}'' \frac{R_1}{R_{u1} + R_1} = 1{,}6 \frac{2}{2{,}5} = 1{,}28 \text{ A}$$

$$I_{AC}'' = I_{BA}'' - I_1'' = 1{,}6 - 1{,}28 = 0{,}32 \text{ A}$$

Sada ćemo izračunati struje u kolu na sl. 5.2.1. Na delu *CA* delimična struja $I_1'$ (sl. 5.2.2) usmerena je od čvora *C*, ka čvoru *A*, a delimično struja $I_1''$ (sl. 5.2.3) od A ka C, tj. suprotno prvoj. Zato je sumarna struja:

$$I_1 = I_1' - I_1'' = 2{,}4 - 1{,}28 = 1{,}12 \text{ A}$$

Smer struje $I_1$ (sl. 5.2.1) podudara se sa smerom veće delimične struje, tj. struje $I_1'$.

Analogno određujemo struje $I_{BA}$ i $I_2$:

$$I_{BA} = I_{BA}'' - I_{AB}' = 1{,}6 - 1{,}2 = 0{,}4 \text{ A}$$

$$I_2 = I_2'' - I_2' = 3{,}2 - 0{,}96 = 2{,}24 \text{ A}$$

U granicama *AC* obe delimične struje ($I_{AC}'$ i $I_{AC}''$) istog su smera, pa je:

$$I_{AC} = I_{AC}' + I_{AC}'' = 1{,}2 + 0{,}32 = 1{,}52 \text{ A}$$

Analogno tome je:

$$I_{BC} = I_{BC}' + I_{BC}'' = 0{,}24 + 1{,}6 = 1{,}84 \text{ A}$$

Izračunajmo sada napone između čvornih tačaka:

$$U_{BA} = I_{BA} \cdot R_2 = 0{,}4 \cdot 1{,}6 = 0{,}64 \text{ V}$$

$$U_{AC} = I_{AC} \cdot R_1 = 1{,}52 \cdot 2 = 3{,}04 \text{ V}$$

$$U_{BC} = I_{BC} \cdot R_3 = 1{,}84 \cdot 2 = 3{,}68 \text{ V}$$

Izvršimo na kraju rezultata proveru po Kirhofovim zakonima: za čvor *A*:

$$I_{AC} = I_1 + I_{BA}$$

$$1{,}52 = 1{,}12 + 0{,}4$$

za čvor *B*:

$$I_2 = I_{BA} + I_{BC}$$

$$2{,}24 = 0{,}4 + 1{,}84$$

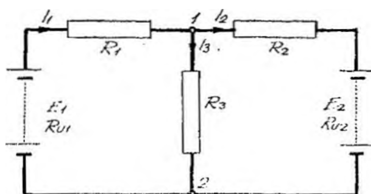
za konturu *ABC*:

$$U_{AC} - U_{CB} + U_{BA} = 0$$

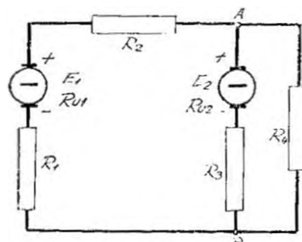
$$3{,}04 + 3{,}68 + 0{,}64 = 0$$

### 5.2.3. Zadaci za samostalno rešavanje

1. Na šemi (sl. 5.2.4) imamo dva izvora struje: bateriju sa $E_1 = 75\,V$ i $R_{u1} = 100\,\Omega$ i bateriju sa $E_2 = 50\,V$ i $R_{u2} = 100\,\Omega$. U kolo su priključeni otpori $R_1 = 25\,\Omega$, $R_2 = 200\,\Omega$ i $R_3 = 1000\,\Omega$. Izračunati struje u granama primenom metode superpozicije.



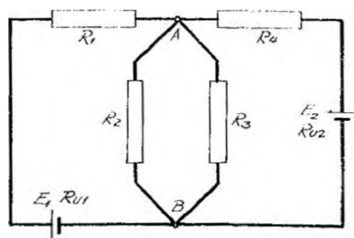
Sl. 5.2.4



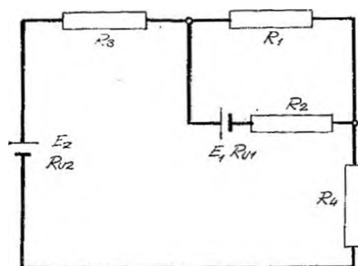
Sl. 5.2.5

2. Odrediti struje u svim granama kola (sl. 5.2.5), ako je $E_1 = E_2 = 120\,V$, $R_{u1} = 0{,}5\,\Omega$, $R_{u2} = 0{,}4\,\Omega$, $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 14{,}5\,\Omega$, $R_3 = 12{,}4\,\Omega$ i $R_4 = 83{,}3\,\Omega$.

3. U kolu (sl. 5.2.6) odrediti struje u svim granama metodom superpozicije, ako je $E_1 = 45\,V$, $E_2 = 60\,V$, $R_1 = 60\,\Omega$, $R_2 = 100\,\Omega$, $R_3 = 150\,\Omega$, $R_4 = 20\,\Omega$. Unutrašnji otpor izvora zanemariti.



Sl. 5.2.6



Sl. 5.2.7

4. Odrediti struje u kolu (sl. 5.2.7) metodom superpozicije. Zadato je: $E_1 = 60\,V$, $E_2 = 90\,V$, $R_{u1} = 0{,}24\,\Omega$, $R_{u2} = 0{,}13\,\Omega$, $R_1 = 25\,\Omega$, $R_2 = 17\,\Omega$, $R_3 = 12\,\Omega$, $R_4 = 4\,\Omega$.

5. Za kolo prikazano na sl. 5.2.8 metodom superpozicije izračunati struje pri sledećim vrednostima:

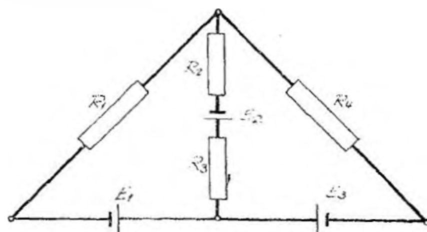
$E_1 = 90$ V, $E_2 = 113,6$ V,

$E_3 = 100$ V, $R_1 = 294\ \Omega$,

$R_2 = 150\ \Omega$, $R_3 = 250\ \Omega$ i

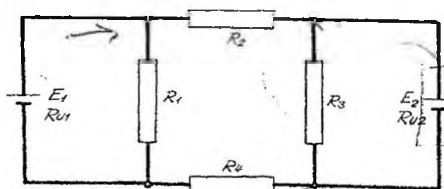
$R_4 = 476\ \Omega$.

Unutrašnje otpore izvora zanemariti.



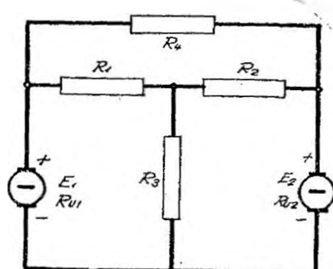
Sl. 5.2.8

6. Odrediti struje u svim granama kola (sl. 5.2.9) ako je: $E_1 = 16,4$ V, $E_2 = 24,5$ V, $R_1 = 3\ \Omega$, $R_2 = 0,8\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$, $R_{u2} = 2\ \Omega$, $R_{u1} = 2\ \Omega$, $R_4 = 5\ \Omega$.

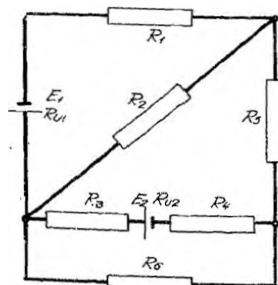


Sl. 5.2.9

7. U kolu (sl. 5.2.10) odrediti sve struje, ako je $E_1 = E_2 = 100$ V, $R_{u1} = R_{u2} = 0,25\ \Omega$, $R_1 = R_2 = 15\ \Omega$, $R_3 = 5,5\ \Omega$ i $R_4 = 20\ \Omega$,



Sl. 5.2.10



Sl. 5.2.11

8. Za kolo, pokazano na sl. 5.2.11, izračunati sve struje pri sledećim zadatim vrednostima:

$E_1 = E_2 = 60$ V, $R_1 = 19,6\ \Omega$, $R_2 = 15\ \Omega$, $R_{u1} = 0,4\ \Omega$, $R_3 = R_4 = 9,8\ \Omega$, $R_{u2} = 0,4\ \Omega$, $R_5 = 10\ \Omega$ i $R_6 = 15\ \Omega$.

## 5.3. METOD JEDNAČINA KIRHOFA

### 5.3.1. **Osnovni pojmovi i formule**

Poredak proračuna složenih kola s nekoliko izvora energije pomoću ove metode je sledeći:

a — označimo smer struja u svim granama šeme ($m$ broj struja),

b — odredimo $n$ čvorova,

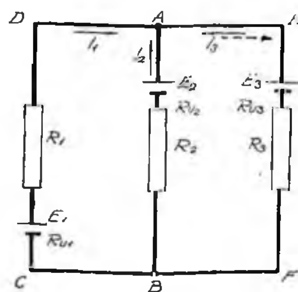
c — broj jednačina, sastavljenih po prvom Kirhofovom zakonu, treba da bude $n-1$,

d — broj jednačina, sastavljen po drugom Kirhofovom zakonu, određuje se iz izraza $m-(n-1)$,

e — rešavamo dobijeni sistem jednačina određujući struje u granama.

### 5.3.2. **Primeri**

**1. primer:** Za kolo (sl. 5.3.1) zadato je $E_1=60$ V, $E_2=48$ V, $E_3=6$ V, $R_1=200\,\Omega$, $R_2=100\,\Omega$, $R_3=9{,}5\,\Omega$ i $R_{u3}=0{,}5\,\Omega$. Unutrašnji otpor prvog i drugog izvora možemo zanemariti ($R_{u1}=R_{u2}=0$). Treba odrediti struje u svim granama.



**Sl. 5.3.1**

Rešenje: Sa slike vidimo da je, pošto smo označili smer struje, $m=3$ a $n=2$. Prema tome broj jednačina po prvom Kirhofovom zakonu iznosi:

$$n-1=2-1=\text{jedna jednačina}$$

Na primer za čvor $A$ jednačina glasi:

$$I_1+I_2+I_3=0. \qquad (1)$$

Broj jednačina sastavljen po drugom Kirhofovom zakonu iznosi:

$$m-(n-1)=3-(2-1)=\text{dve jednačine}$$

Za te jednačine odaberemo konture *BAEFB* i *CDEFC*. Obilazeći svaku konturu u smeru kretanja kazaljke na satu, dobijamo:

$$I_2(R_2+R_{u2})-I_3(R_3+R_{u3})=E_2-E_3 \qquad (2)$$

$$I_1(R_1+R_{u1})-I_3(R_3+R_{u3})=E_1-E_3 \qquad (3)$$

Sada izračunavamo struje, uvrštavajući u jednačine (2) i (3) vrednost otpora i ems:

$$I_2\cdot 100-I_3(9{,}5+0{,}5)=48-6$$

ili $$100\cdot I_2-10\cdot I_3=42, \text{ odnosno} \qquad (4)$$

$$I_1\cdot 200-I_3(9{,}5+0{,}5)=60-6$$

$$200\cdot I_1-10\cdot I_3=54 \qquad (5)$$

Izračunavanje struja se svodi na rešavanje sistema od tri jednačine (1), (4) i (5) sa tri nepoznate. Zato, na primer, odredimo struju $I_2$ iz jednačine (1) i uvrstimo njenu vrednost u jednačinu (4):

$$-100(I_1+I_3)-10\cdot I_3=42$$

Uređenjem ove jednačine dobijamo:

$$-100\cdot I_1-110\cdot I_3=42 \qquad (6)$$

Dobili smo dve jednačine (5) i (6) s nepoznatim strujama $I_1$ i $I_3$. Pomnožimo jednačinu (6) sa 2 i saberemo sa jednačinom (5), pa dobijamo:

$$-10\cdot I_3-220\cdot I_3=138$$

odakle je:

$$I_3=-\frac{138}{230}=-0{,}6\text{ A}$$

Uvrstimo vrednost struje $I_3$ u jednačinu (6), pa dobijamo:

$$-100\cdot I_1-110(-0{,}6)=42$$

odakle je:

$$I_1=\frac{42-66}{-100}=0{,}24\text{ A}$$

Struju $I_2$ određujemo iz jednačine (1):

$$I_2 = -I_1 - I_3 = -0{,}24 + 0{,}6 = 0{,}36\ \mathrm{A}$$

Struje $I_1$ i $I_2$ imaju pozitivne vrednosti, a $I_3$ negativnu. Smer struja $I_1$ i $I_2$ bio je pravilno izabran, a struje $I_3$ nepravilno. Prema tome, pravilan smer struje $I_3$ prikazan je crtkanom strelicom na sl. 5.3.1. Pri tome je suma dolazećih struja u čvoru $A: I_1 + I_2 = 0{,}24 + 0{,}36 = 0{,}6$ A jednaka odlazećoj struji $I_3 = 0{,}6$ A.

Na kraju treba izvršiti proveru po drugom Kirhofovom zakonu, na primer za konturu $ABCD$:

$$I_1 (R_1 + R_{u1}) - I_2 (R_2 + R_{u2}) = E_1 - E_2$$

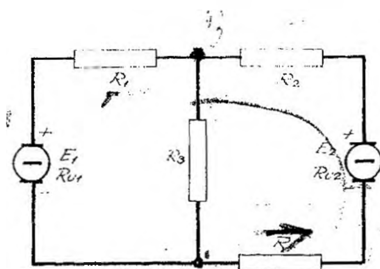
$$0{,}24\,(200 + 0) - 0{,}36\,(100 + 0) = 60 - 48$$

$$48 - 36 = 60 - 48$$

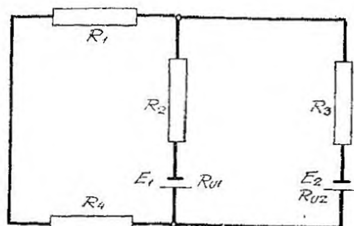
$$12 = 12$$

### 5.3.3. **Zadaci za samostalno rešavanje**

1. Metodom Kirhofovih jednačina odrediti struje u svim granama kola (sl. 5.3.2) ako je zadato $E_1 = E_2 = 110$ V, $R_1 = 0{,}98\ \Omega$, $R_2 = R_4 = 0{,}5\ \Omega$, $R_3 = 4{,}35\ \Omega$, $R_{u1} = 0{,}15\ \Omega$ i $R_{u2} = 0{,}13\ \Omega$.



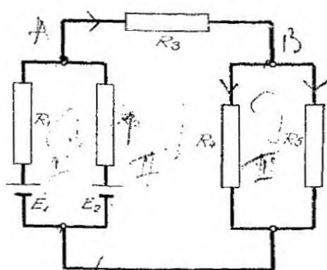

**Sl. 5.3.2**



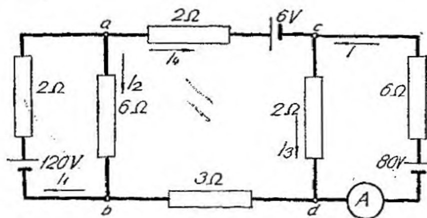

**Sl. 5.3.3**

2. Odrediti struje u svim granama kola (sl. 5.3.3), ako je $E_1 = 260$ V, $E_2 = 80$ V, $R_1 = 1{,}2$ kΩ, $R_2 = 240\ \Omega$, $R_3 = R_4 = 0{,}8$ kΩ, $R_{u1} = 20\ \Omega$ i $R_{u2} = 0$.

3. Na šemi prikazanoj na sl. 5.3.4, brojčane vrednosti su: $E_1 = 10\,V$, $E_2 = 18\,V$, $R_1 = 2\,\Omega$, $R_2 = 6\,\Omega$, $R_3 = 6{,}5\,\Omega$, $R_4 = 6\,\Omega$ i $R_5 = 12\,\Omega$. Naći sve struje i izvršiti proveru po prvom i drugom Kirhofovom zakonu.



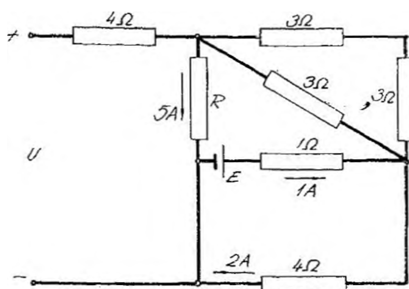

Sl. 5.3.4



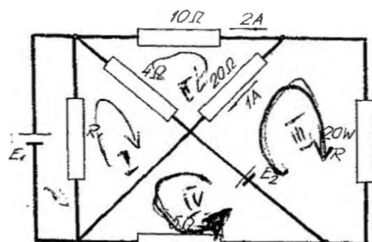

Sl. 5.3.5

4. U kolu (sl. 5.3.5) ampermetar pokazuje struju 8 A. Odrediti struje u drugim granama koristeći se Omovim i Kirhofovim zakonima.

5. U kolu (sl. 5.3.6) treba naći napon $U$, otpor $R$ i ems galvanskog elementa $E$ čiji unutrašnji otpor možemo zanemariti.

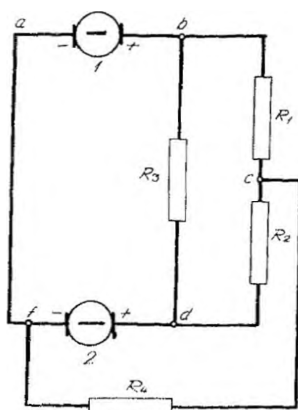



Sl. 5.3.6




Sl. 5.3.7

6. Na sl. 5.3.7 date su struje, parametri kola i snaga trošena u otporu $R$. Odrediti $R_1$, $R$, $E_1$ i $E_2$.




Sl. 5.3.8

7. Na sl. 5.3.8 je prikazana šema uključenja dve električne mašine. Unutrašnji otpori mašina 1 i 2 su: $R_{u1} = 1\,\Omega$, $= R_{u2}\,2\,\Omega$. Spoljni deo kola (opterećenje) ima otpor $R_1 = 5\,\Omega$, $R_2 = 1\,\Omega$, $R_3 = 2\,\Omega$ i $R_4 = 9{,}5\,\Omega$. Potencijali čvorova: $\varphi_a = \varphi_f = 0$, $\varphi_b = 120$ V, $\varphi_c = 95$ V i $\varphi_d = 110$ V.

Naći ems svake mašine i snage.

## 5.4. METOD DVA ČVORA

### 5.4.1. **Osnovni pojmovi i formule**

Za razliku od ranija tri metoda, primenjivana u bilo kom složenom kolu, ovaj metod je za proračun kola koja imaju samo dva čvora (pri bilo kom broju grana). Kola sa dva čvora često srećemo u praksi i metod dva čvora znatno uprošćuje njihov proračun. Za proračun primenjujemo formulu koja određuje napon između čvornih tačaka:

$$U_0 = \frac{\Sigma E \cdot G}{\Sigma G} \text{ [V]} \tag{5.4.1}$$

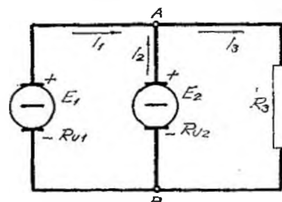
gde su:

$\Sigma E \cdot G$ [V · S] — algebarska suma proizvoda ems i provodnosti grana,

$EG$ [S] — suma provodnosti grana.

### 5.4.2. Primeri

**1. primer:** Dva paralelno uključena generatora (sl. 5.4.1) sa ems $E_1 = E_2 = 230$ V i unutrašnjim otporima $R_{u1} = 0,5\ \Omega$ i $R_{u2} = 0,4\ \Omega$ napajaju potrošač čiji je ekvivalentni otpor $R_3 = 10\ \Omega$. Odrediti struje, snage generatora, snage gubitaka u unutrašnjim otporima, a takođe i snagu potrošača $R_3$.



Sl. 5.4.1

R e š e n j e: Za razmatrano kolo (sl. 5.4.1) formula 5.4.1 ima oblik:

$$U_0 = U_{AB} = \frac{E_1 \cdot G_1 + E_2 \cdot G_2}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

U brojitelju nemamo $E_3 G_3$, pošto treća grana nema ems. Ako bi, na primer, ems $E_2$ delovala u suprotnom smeru, trebalo bi ispred proizvoda $E_2 \cdot G_2$ staviti znak minus.

Izračunajmo sada provodnost grana:

$$G_1 = \frac{1}{R_{n1}} = \frac{1}{0,5} = 2,0\ \text{S}$$

$$G_2 = \frac{1}{R_{n2}} = \frac{1}{0,4} = 2,5\ \text{S}$$

$$G_3 = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{10} = 0,1\ \text{S}$$

Čvorni napon je:

$$U_{AB} = \frac{E_1 \cdot G_1 + E_2 \cdot G_2}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{230 \cdot 2 + 230 \cdot 2,5}{2 + 2,5 + 0,1} = 225\ \text{V}$$

Pošto smer struja pre proračunaa nije poznat, izaberimo ga proizvoljno, tj. onako kako je na slici naznačeno. Sada ćemo preći na izračunavanje struja. Sa slike vidimo da se smer struja poklapa sa smerom ems. U takvom slučaju čvorni napon, ili napon na krajevima grana sa ems, jednak je razlici ems izvora i pada napona na otporu grana:

$$U_{AB} = E_1 - I_1 \cdot R_{u1} = E_2 - I_2 \cdot R_{u2}$$

odakle je:

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{AB}}{R_{u1}} = (E_1 - U_{AB}) \cdot G_1 = (230 - 225) \cdot 2 = 10 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{E_2 - U_{AB}}{R_{u2}} = (E_2 - U_{AB})\, G_2 = (230 - 225) \cdot 2{,}5 = 12{,}5 \text{ A}$$

Po Omovom zakonu je:

$$I_3 = \frac{U_{AB}}{R_3} = U_{AB} \cdot G_3 = 225 \cdot 0{,}1 = 22{,}5 \text{ A}$$

Izvori struje imaju snage:

$$P_1 = E_1 \cdot I_1 = 230 \cdot 10 = 10 = 2{,}3 \text{ kW}$$

$$P_2 = E_2 \cdot I_2 = 230 \cdot 12{,}5 = 2{,}875 \text{ kW}$$

Unutar izvora troši se snaga:

$$P_{u1} = I_1^2 \cdot R_{u1} = 10^2 \cdot 0{,}5 = 50 \text{ W} = 0{,}050 \text{ kW}$$

$$P_{u2} = I_2^2 \cdot R_{u2} = (12{,}5)^2 \cdot 0{,}4 = 62{,}5 \text{ W} = 0{,}0625 \text{ kW}$$

Snaga potrošača je:

$$P_3 = I_3^2 \cdot R_3 = (22{,}5)^2 \cdot 10 = 5{,}0625 \text{ kW}$$

Sastavimo bilans snage:

$$P_{u1} + P_{u2} + P_3 = 0{,}050 + 0{,}0625 + 5{,}0625 = 5{,}175 \text{ kW}$$

$$P_1 + P_2 = 2{,}30 + 2{,}875 = 5{,}175 \text{ kW}$$

odnosno:

$$P_{u1} + P_{u2} + P_3 = P_1 + P_2$$

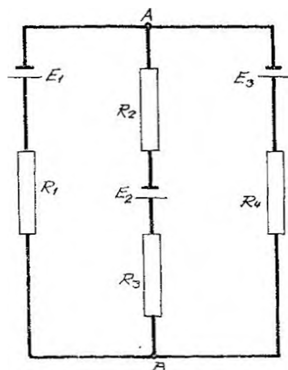
što mora i biti, jer je proračun pravilno izvršen.

### 5.4.3. Zadaci za samostalno rešavanje

1. Izračunati metodom dva čvora napon između tačaka A i $B$ i struje u svim delovima kola (sl. 5.2.6) pri sledećim zadatim vrednostima: $E_1 = E_2 = 105$ V, $R_1 = R_4 = 9{,}5\ \Omega$, $R_2 = R_3 = 20\ \Omega$, $R_{u1} = R_{u2} = 0{,}5\ \Omega$.

2. Metodom dva čvora odrediti struje u svim granama kola (sl. 5.4.2), ako je $E_1 = 12$ V, $E_2 = 6$ V, $E_3 = 16$ V, $R_1 = 125\ \Omega$, $R_2 = 61\ \Omega$, $R_3 = 100{,}3\ \Omega$ i $R_4 = 172{,}4\ \Omega$.

Unutrašnje otpore izvora zanemariti.



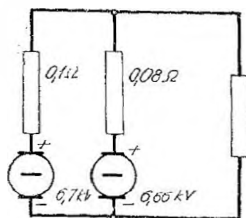
Sl. 5.4.2

3. U kolu (sl. 5.2.5) odrediti čvorni napon $U_{AB}$, ako struja u grani drugog generatora iznosi 20 A, a usmerena je od čvora $B$ ka čvoru $A$. Podaci:

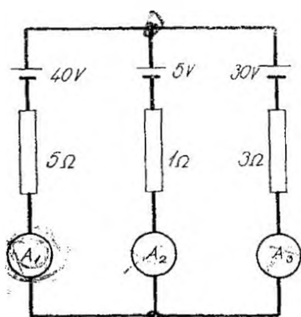
$R_{u2} = 0{,}2\ \Omega$, $R_3 = 2{,}6\ \Omega$

$E_2 = 230$ V

4. U električnoj centrali dva generatora rade paralelno i na njih je priključeno opterećenje. Ems izvora i unutrašnji otpori generatora dati su na šemi (sl. 5.4.3). Treba naći snagu, koju odaje svaki generator, ako je snaga opterećenja 26 MW.



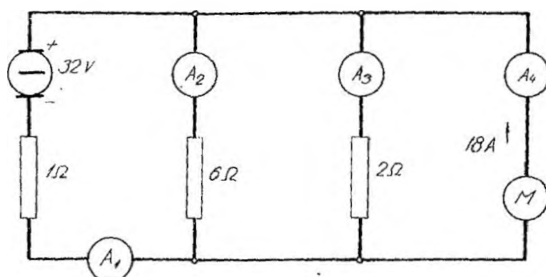
Sl. 5.4.3



Sl. 5.4.4

5. U kolu prikazanom na sl. 5.4.4 odrediti vrednosti struje koju pokazuju ampermetri.

6. Odrediti vrednost struje koja prikazuje ampermetar na sl. 5.4.5. Sastaviti bilans snage.




Sl. 5.4.5

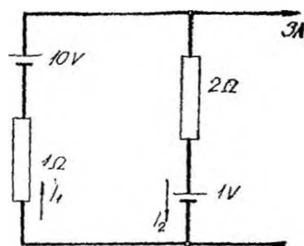
7. Tri generatora sa ems i otporima: $E_1 = E_2 = 480$ V, $E_3 = 460$ V, $R_{u1} = R_{u3} = 0{,}2\ \Omega$ i $R_{u2} = 0{,}4\ \Omega$, rade paralelno. Ukupno opterećenje je 400 A.

a) Naći struju svakog generatora.

b) Kako će se izmeniti struje generatora 2 i 3 ako generator 1 isključimo?

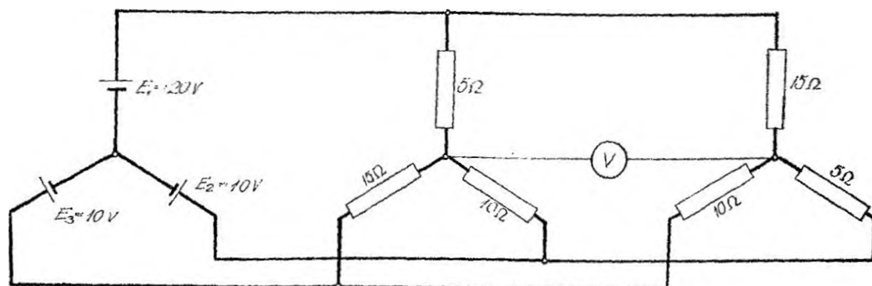
c) Naći ems i unutrašnji otpor generatora ekvivalentnog sa tri generatora.

8. Odrediti struje u kolu prikazanom na sl. 5.4.6.




Sl. 5.4.6

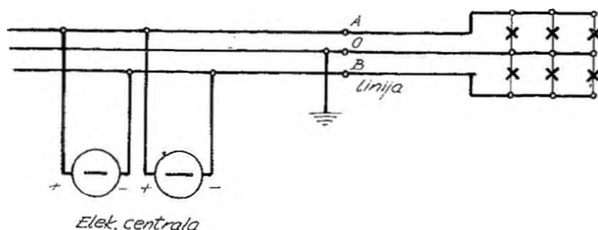
9. Odrediti vrednost napona koji pokazuje voltmetar (sl. 5.4.7) čiji je unutrašnji otpor mnogo veći od bilo kojega otpora na šemi.




Sl. 5.4.7

10. U kolu (sl. 5.4.7) umesto voltmetra, uključen je ampermetar čiji je otpor mnogo manji od bilo kojeg otpora na šemi. Odrediti vrednost struje koju pokazuje ampermetar.

11. Električna centrala napaja mrežu javne rasvete, koja se nalazi na rastojanju 0,8 km od centrale, preko trovodne linije (sl. 5.4.8). Opterećenje se sastoji od dve grupe po 200 sijalica (40 W, 220 V). Svaki od generatora centrale razvija ems 240 V i ima unutrašnji otpor 0,3 Ω. Glavni provodnici $A$ i $B$ linije imaju otpor po 0,2 Ω, a nulti provodnik 0,35 Ω.




Sl. 5.4.8

Odrediti struju u nultom provodniku i napon na obe grupe sijalica u dva slučaja:

a — pri uključenju svih sijalica,

b — pri uključenju svih sijalica u grupi $A$ i polovini svih sijalica u grupi $B$.

Pri neznatnim odstupanjima napona na sijalicama od nominalnog možemo uzeti otpor sijalica nepromenjenim.

## 5.5. METOD EKVIVALENTNOG GENERATORA — TEVENINOVA TEOREMA

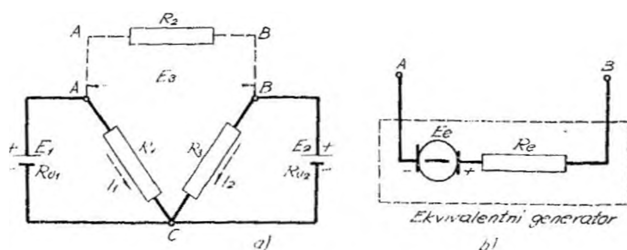
### 5.5.1. **Osnovni pojmovi i formule**

Postupak pri proračunu ovom metodom pokazaćemo na sledećim primerima.

### 5.5.2. **Primeri**

**1. primer:** Za kolo na sl. 5.2.1 odrediti struju $I_{BA}$ metodom ekvivalentnog generatora pri brojčanim vrednostima datim u zadatku 5.2.2.1.

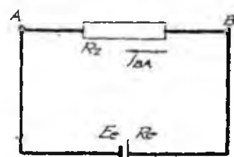
Rešenje: Prvo ćemo sastaviti ekvivalentnu šemu. Kolo možemo posmatrati odvojeno, u čvornim tačkama $A$ i $B$ (sl. 5.5.1a) na dva dela: grana $BA$, u kojoj treba da izračunamo struju (nazovimo je spoljnim delom šeme) i ostali deo kola (nazovimo ga unutrašnjim delom). Oba dela šeme spojena (sl. 5.5.1a) su crtkanim linijama ($AA$ i $BB$).




Sl. 5.5.1

Prema teoremi ekvivalentnog generatora (Teveninova teorema) ceo unutrašnji deo možemo zameniti jednim izvorom energije sa ems $E_e$ i otporom $R_e$ (sl. 5.5.1b). Na taj način dobijamo prosto nerazgranato kolo (sl. 5.5.2), za koje nije teško odrediti struju:

$$I_{BA} = \frac{E_e}{R_e + R_2} \quad (5.5.1)$$



Sl. 5.5.2

U tom slučaju glavni zadatak proračuna kola ovom metodom sastoji se u određivanju ekvivalentnih parametara ($E_e$ i $R_e$) unutrašnjeg dela kola.

Ems ekvivalentnog generatora $E_e$ jednaka je naponu na stezaljkama unutrašnjeg dela kola $U_{AB}$ (sl. 5.5.1a) pri isključenom spoljnem delu kola. Uzimajući da $U_{AB}$ ima pozitivan smer od čvora $B$ ka čvoru $A$, tj. $U_{BA} = \varphi_B - \varphi_A$, dobijamo:

$$E_e = U_{BA} = \varphi_B - \varphi_A$$

Padovi napona na delovima $BC$ i $AC$ kola su:

$$U_{BC}=\varphi_B-\varphi_C=I_2\cdot R_3=\frac{E_2\cdot E_3}{R_{u2}+R_3}=\frac{4{,}8\cdot 2}{0{,}5+2}=3{,}84\,\mathrm{V}$$

$$U_{AC}=\varphi_A-\varphi_C=I_1\cdot R_1=\frac{E_1\cdot R_1}{R_{u1}+R_1}=\frac{3{,}6\cdot 2}{0{,}5+2}=2{,}88\,\mathrm{V}$$

gde su $I_1$ i $I_2$ struje u kolu (sl. 5.5.1a) pri isključenju grane $BA$.

Odatle sledi:

$$E_e=\varphi_B-\varphi_A=U_{BC}-U_{AC}=\varphi_B-\varphi_C-(\varphi_A-\varphi_C)=\varphi_B-\varphi_A=$$
$$=3{,}84-2{,}88=0{,}96\,\mathrm{V}$$

Unutrašnji otpor ekvivalentnog generatora $R_e$ jednak je ukupnom otporu unutrašnjeg dela kola $R_{uk}$ u odnosu na tačke $A$ i $B$ (sl. 5.5.1a) pri isključenom spoljnom delu kola:

$$R_e=R_{uk}=\frac{R_{u1}\cdot R_1}{R_{u1}+R_1}+\frac{R_{u2}\cdot R_3}{R_{u2}+R_3}=\frac{0{,}5\cdot 2}{2{,}5}+\frac{0{,}5\cdot 2}{2{,}5}=0{,}8\,\Omega$$

Na kraju izračunavamo struju:

$$I_{BA}=\frac{E_e}{R_e+R_2}=\frac{0{,}96}{0{,}8+1{,}6}=0{,}4\,\mathrm{A}$$

**2. primer:** Izračunati struju u grani sa ems $E_2$ (sl. 5.2.1) iz prethodnog primera. Metod proračuna ostaje isti.

Rešenje: Isključivši tu granu (sl. 5.5.2a) odredimo napon:

$$U_{BC}=E_e=\varphi_B-\varphi_C=I_3\cdot R_3$$

Zatim određujemo struju:

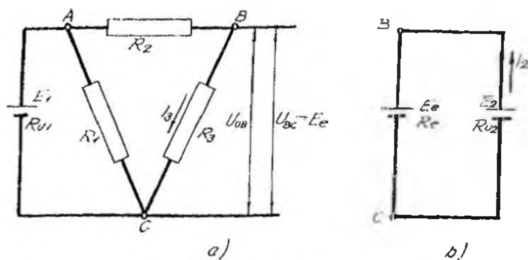
$$I_1=\frac{E_1}{R_1+R_{AC}}$$

gde su:

$$R_{AC}=\frac{R_1(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3}$$

$$I_3=I_1\frac{R_1}{R_1+R_2+R_3}$$

Ukupni otpor u odnosu na tačke $B$ i $C$ dobijamo kao paralelan spoj otpora $R_3$ i otpora $R_2$ i $R_{AB}$, uključenih redno u odnosu




Sl. 5.5.3

na tačke $B$ i $C$. S druge strane, otpor $R_{AC}$ određujemo kao ekvivalentni otpor paralelnom spoju $R_{u1}$ i $R_1$ u čvornim tačkama $A$ i $C$. Tako je:

$$R_{AB}=\frac{R_{u1}+R_1}{R_{u1}+R_1}$$

$$R_e=R_{uk}=\frac{R_3(R_2+R_{AC})}{R_3+R_2+R_{AC}}$$

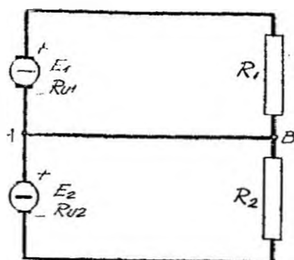
Sada sastavljamo ekvivalentnu šemu (sl. 5.5.3b) u kojoj je struja $I_2$ data izrazom:

$$I_2=\frac{E_2-E_3}{R_{u2}+R_e}$$

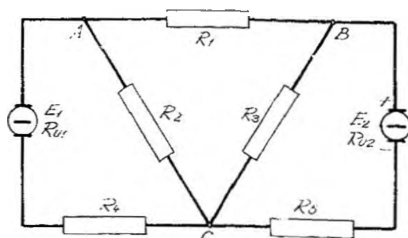
Ova metoda proračuna često se naziva i metoda praznog hoda.

### 5.5.3. Zadaci za samostalno rešavanje

1. Metodom ekvivalentnog generatora odrediti struju u srednjem provodniku ($AB$) sistema (sl. 5.5.4), ako je $E_1 = E_2 = 225$ V, $R_{u1} = R_{u2} = 0{,}3\ \Omega$, $R_1 = 2{,}7\ \Omega$ i $R_2 = 4{,}2\ \Omega$.



Sl. 5.5.4

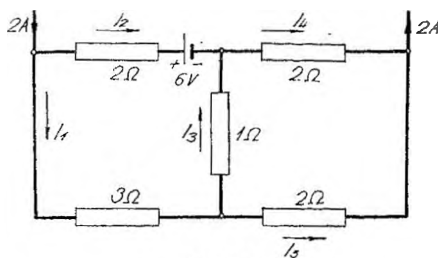


Sl. 5.5.5

2. Odrediti struju u grani $AB$ metodom ekvivalentnog generatora (sl. 5.5.5) ako je $E_1 = 40$ V, $E_2 = 30$ V, $R_{u1} = R_{u2} = 0{,}4\ \Omega$, $R_1 = 30\ \Omega$, $R_2 = R_3 = 10\ \Omega$ i $R_4 = R_5 = 3{,}6\ \Omega$.

3. U kolu (sl. 5.5.6) naći struju $I_3$ metodom ekvivalentnog generatora.

4. Koliku ems treba uključiti u kolo (sl. 5.5.6) redno sa ems 6 V, pa da struja $I_2$ bude jednaka nuli?



Sl. 5.5.6

5. Akumulatorska baterija ems $E_1$ unutrašnjeg otpora $R_{u1} = 0{,}01\ \Omega$ i sa redno uključenim otporom $R_1$ spojena je paralelno s generatorom čija je ems $E_2$, a unutrašnji otpor $R_{u2} = 0{,}15\ \Omega$. Akumulatorska baterija i generator obezbeđuju besprekorno napajanje potrošača čiji je napon 120 V, a snaga 0,96 kW.

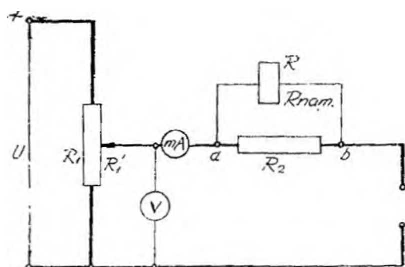
Treba odrediti:

a) otpor $R_1$ i ems $E_2$, ako su struje izvora jednake, a ems $E_1 = 126$ V;

b) struje izvora i ems $E_2$, ako je ems $E_1 = 126$ V i $R_1 = 1{,}49\ \Omega$.

Ostali podaci ostaju isti.

6. Ems izvora možemo izmeriti kompenzacionom metodom po šemi na sl. 5.5.7, gde se veličina ems $E$ dobija iz pokazivanja voltmetra pri uslovu da miliapermetar pokazuje nulu. Takav režim postiže se regulacijom reostata $R_1$. Zadato je $E = 24$ V, $U = 100$ V, $R_1 = 10$ kΩ, $R_2 = 12$ kΩ i otpor namotaja releja $R_n = 3$ kΩ. Treba odrediti otpor $R_1'$ za dva režima:




Sl. 5.5.7

a) kompenzacije (miliampermetar pokazuje nulu),

b) kroz namotaj releja $R$ prolazi struja 0,4 mA u smeru od stezaljke $a$ ka stezaljci $b$.

7. Struje prvog i drugog generatora (sl. 5.2.5) iznose 50 i 10 A, a struja treće grane 40 A.

Odrediti ems generatora, ako je $R_{u1} = R_{u2} = 0{,}1\,\Omega$, $R_1 = R_2 = 0{,}05\,\Omega$, $R_3 = 0{,}9\,\Omega$ i $R_4 = 5{,}5\,\Omega$.

8. U kolu na sl. 5.2.5 generatori imaju iste ems. Struje u otporima $R_1$, $R_3$ i $R_4$ iznose 30, 20 i 50 A. Ukupni otpor srednje grane je $0{,}25\,\Omega$, a otpor $R_4 = 2{,}2\,\Omega$.

Odrediti ems generatora i provodnost prve grane.

9. struja prvog i drugog izvora (sl. 5.4.2) iznose 0,6 i 0,9 A i obe su usmerene od čvora $A$ ka čvoru $B$.

Odrediti ems $E_1$ i $E_2$, ako je $E_3 = 75$ V, $R_4 = 10\,\Omega$, $R_1 = 100\,\Omega$ i $R_2 = R_3 = 25\,\Omega$. Unutrašnji otpor generatora zanemariti.

10. U kolu (sl. 5.4.2) je $E_1 = 60$ V, $E_3 = 115$ V i $R_1 = 100\,\Omega$. Struja u srednjoj grani je $I_2 = 0{,}1$ A, a struja $I_3$ kroz otpor $R_4$ jednaka je 0,15 A. Ukupni otpor srednje grane je $R_2 + R_3 = 150\,\Omega$. Odrediti struju $I_1$ izvora sa ems $E_1$, ems drugog izvor $E_2$ i otpor $R_4$, ako su struje $I_2$ i $I_3$ usmerene od $A$ ka $B$, a struja $I_1$ od $B$ ka $A$ Unutrašnje otpore izvora zanemariti.

11. Na sl. 5.5.8 i 5.5.9 prikazane su dve varijante spoja tri generatora i potrošača. Odrediti struje u vodovima 1, 2, 3 i 4 svake šeme.

Zadato je:

$E_1 = E_2 = E_3 = 230$ V,

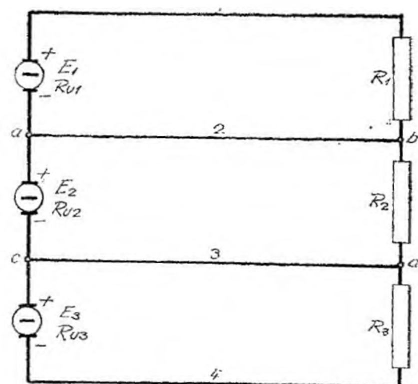
$R_{u1} = R_{u2} = R_{u3} = 0,5\ \Omega$,

$R_1 = 4,1\ \Omega$ i

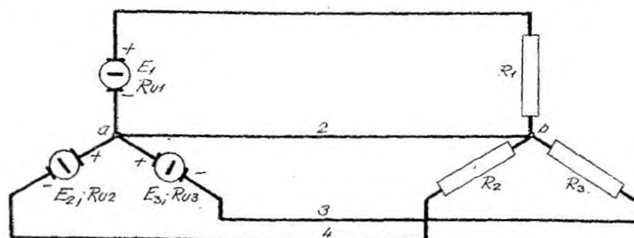
$R_2 = R_3 = 1,8\ \Omega$

12. Rešiti prethodni zadatak pri uslovu da su otpori potrošača jednaki:

$R_1 = R_2 = R_3 = 4,1\ \Omega$

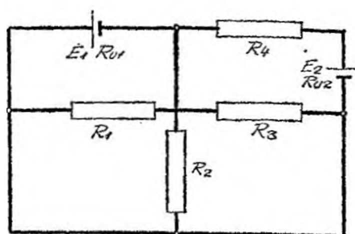



Sl. 5.5.8

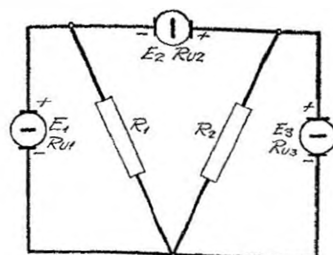



Sl. 5.5.9

13. Za kolo (sl. 5.5.10) izračunati struje, ako je $E_1 = 60$ V, $E_2 = 32$ V, $R_{u1} = 0,8\ \Omega$, $R_{u2} = 0,33\ \Omega$, $R_1 = R_2 = R_3 = 15\ \Omega$ i $R_4 = 1\ \Omega$.




Sl. 5.5.10




Sl. 5.5.11

14. Odrediti struje u svim granama kola (sl. 5.5.11), ako je $E_1 = E_2 = 150$ V, $E_3 = 110$ V, $R_1 = R_2 = 10\ \Omega$ i $R_{u1} = R_{u2} = R_{u3} = 2\ \Omega$.

## 5.6. METOD KONTURNIH STRUJA

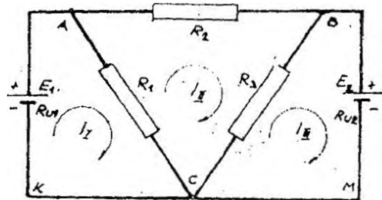
### 5.6.1. **Osnovni pojmovi i formule**

Postupak pri proračunu ovom metodom daćemo u sledećem primeru.

### 5.6.2. **Primeri**

Rešiti primer dat u poglavlju 5.2 (sl. 5.2.1) metodom konturnih struja. Postupak pri proračunu ovom metodom je sledeći:

a) Određivanje broja konturnih struja: U metodi konturnih struja primenjuje se samo drugi Kirhofov zakon, pa je broj jednačina koje treba rešiti manji. U zadatom kolu (sl. 5.6.1) imamo tri konture sa strujama: $I_I$ — u konturi $CKAC$, $I_{II}$ — u konturi $CABC$, $I_{III}$ — u konturi $CBMC$.



Sl. 5.5.13

Smer svih konturnih struja izaberimo isti (na sl. 5.6.2 u smeru kazaljke na satu), a stvarni smer struja odredićemo posle proračuna kola. Uzmimo smer struja u granama prema sl. 5.2.1 i izrazimo ih preko konturnih struja $I_I$, $I_{II}$, $I_{III}$ (sl. 5.6.1):

$$I_1 = I_I \quad I_{BA} = -I_{II} \quad I_2 = -I_{III}$$

$$I_{AC} = I_I - I_{II} \quad I_{BC} = I_{II} - I_{III}$$

U posmatranom kolu sa tri konturne struje možemo izraziti svih pet struja grana.

b) Određivanje sopstvenog i zajedničkog otpora kontura. Suma svih otpora konture naziva se njenim sopstvenim otporom. Za konturu sa strujom $I_1$ sopstveni otpor iznosi:

$$R_{11} = R_{u1} + R_1 = 0{,}5 + 2 = 2{,}5\ \Omega$$

Za konture po kojima se zatvaraju struje $I_{II}$ i $I_{III}$ imamo:

$$R_{22} = R_1 + R_2 + R_3 = 2 + 1{,}6 + 2 = 5{,}6\ \Omega$$

i

$$R_{33} = E_3 + R_{u2} = 2 + 0{,}5 = 2{,}5\ \Omega$$

Otpor zajedničke grane dve konture naziva se zajedničkim otporom. U našem slučaju grana $AC$ je zajednička i za prvu i drugu konturu, zato se otpor $R_1$ naziva zajedničkim.

Označimo ga na sledeći način:

$$R_{12} = R_{21} = R_1$$

Analogno zajednički otpor druge i treće konture iznosi:

$$R_{23} = R_{32} = R_3$$

Pri zadatim vrednostima imamo:

$$R_{12} = R_{21} = R_{23} = R_{32} = 2\,\Omega$$

c) Sastavljanje konturnih jednačina i izračunavanje struja. Sastavimo konturnu jednačinu (jednačina po drugom Kirfohovom zakonu) za konturu $CKAC$:

$$I_1 \cdot R_{u1} + I_{AC} \cdot R_1 = E_1$$

Zamenimo struju grane $I_{AC}$ razlikom $I_I - I_{II}$ i skupimo članove sa strujom $I_I$, pa dobijamo:

$$I_I(R_{u1} + R_1) - I_{II} \cdot R_1 = E_1$$

U ovoj jednačini algebarska suma padova napona izražava se proizvodom struje razmatrane konture $I_I$ i njenog sopstvenog otpora $R_{11}$, uzetog sa znakom plus, i proizvodom struje druge konture $I_{II}$ i zajedničkog otpora kontura $R_{12}$, uzetog sa znakom minus:

$$I_I \cdot R_{11} - I_{II} \cdot R_{12} = E_1 \qquad (5.6.1)$$

Pozitivan znak za pad napona, izražen sopstvenom strujom konture $(I_I \cdot R_{11})$, i negativan znak za pad napona, izražen sa zajedničkim otporom i strujom druge konture $(-I_{II} \cdot R_{12})$, dobija se uvek pri jednakim smerovima konturnih struja (sl. 5.6.1 — u smeru kazaljke na satu) i obilasku konture u smeru njenih konturnih struja. Koristeći se tim pravilom sastavimo analogno jednačinu za konturu $CABC$:

$$I_{II} \cdot R_{22} - I_I \cdot R_{21} - I_{III} \cdot R_{23} = 0 \qquad (5.6.2)$$

i za konturu $CBMC$

$$I_{III} \cdot R_{33} - I_{II} \cdot R_{23} = -E_2 \qquad (5.6.3)$$

U poslednjoj jednačini ems $E_2$ je sa znakom minus, pošto je smer obilaska poslednje konture suprotan smeru dejstva ems. Uvrstimo u jednačine (5.6.1), (5.6.2) i (5.6.3) ranije izračunate sopstvene i zajedničke otpore kontura pa ćemo dobiti:

$$\left.\begin{aligned} 2{,}5 \cdot I_I - 2\,I_{II} &= 3{,}6 \\ -2 \cdot I_I + 5{,}6\,I_{II} - 2 \cdot I_{III} &= 0 \\ -2\,I_{II} + 2{,}5\,I_{III} &= -4{,}8 \end{aligned}\right\} \qquad (5.6.4)$$

Iz poslednje jednačine izračunajmo $I_{III}$

$$I_{III} = \frac{2\,I_{II} - 4{,}8}{2{,}5} = 0{,}8\,I_{II} - 1{,}92 \qquad (5.6.5)$$

i uvrstimo njenu vrednost u drugu jednačinu sistema (5.6.5) pa dobijamo:

$$-2\,I_I + 4\,I_{II} + 3{,}84 = 0$$

Poslednja jednačina sa prvom jednačinom sistema (5.6.4) daje sistem od dve jednačine:

$$-2\,I_I + 4\,I_{II} = -3{,}84$$

$$2{,}5\,I_I - 2\,I_{II} = 3{,}6$$

Pomnožimo sve članove druge jednačine sa dva i saberimo je sa prvom, pa dobijemo:

$$3\,I_I = 7{,}2 - 3{,}84 \text{ ili}$$

$$I_I = 1{,}12\ \text{A}$$

Iz prve jednačine sistema (5.6.4) odredimo struju u drugoj konturi:

$$I_{II} = \frac{2{,}5\,I_I - 3{,}6}{2} = \frac{2{,}5 \cdot 1{,}12 - 3{,}6}{2} = -0{,}4\ \text{A}$$

Dobijenu vrednost struje $I_{II}$ uvrstimo u jednačinu (5.6.5) pa je struja u trećoj grani:

$$I_{III} = -0{,}8 \cdot 4 - 1{,}92 = -2{,}24\ \text{A}$$

Kako smo na početku pokazali, preko nađenih konturnih struja $I_I$, $I_{II}$, $I_{III}$ izračunajmo sve struje u granama (sl. 5.6.1):

$I_1 = I_I = 1{,}12\ \text{A} \quad I_{BA} = -I_{II} = 0{,}4\ \text{A}$

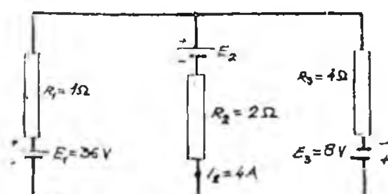
$I_2 = -I_{III} = 2{,}24\ \text{A} \quad I_{AC} = I_I - I_{II} = 1{,}12 + 0{,}4 = 1{,}52\ \text{A}$

$I_{BC} = I_{II} - I_{III} = -0{,}4 + 2{,}24 = 1{,}84\ \text{A}$

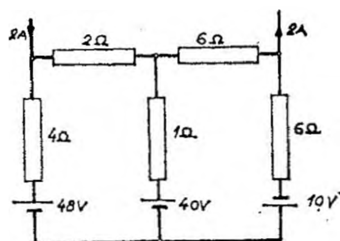
Dobijene vrednosti se slažu s ranije dobijenim vrednostima (primer 5.2.2.1).

### 5.6.3. Zadaci za samostalno rešavanje

1. Zadatak 5.3.2 rešiti metodom konturnih struja.
2. Zadatak 5.5.14 rešiti metodom konturnih struja.
3. Zadatak 5.2.8. rešiti metodom konturnih struja.
4. U kolu na sl. 5.6.2 naći ems $E_2$ i struje u granama.
5. Zadatak 5.5.3 rešiti metodom konturnih struja.
6. U kolu na sl. 5.6.2 naći sve struje.

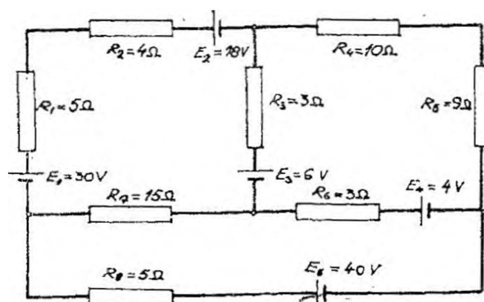


Sl. 5.6.2



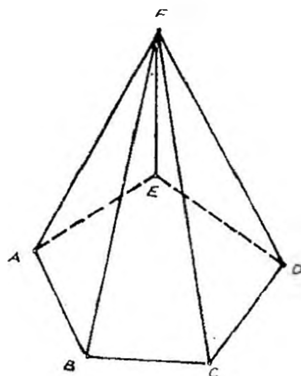
Sl. 5.6.3

7. U kolu na sl. 5.6.4 naći sve struje.



Sl. 5.6.4

8. Zadata je peterostrana pravilna piramida kojoj svaki brid ima otpor $R = 1\,\Omega$ (sl. 5.6.5). Treba odrediti struje koje teku kroz pojedine bridove ako je između tačaka $A$ i $C$ napon $U = 8$ V.




Sl. 5.6.5

Rešenje zadataka iz poglavlja 5.6.

1. 98 mA; 244 mA; 146 mA
2. 40,8 A; 6,8 A; 34 A; 14,8 A; 19,2 A.
3. 1,71 A; (četiri struje); 0
4. 16 V; 12 A; 8 A.
5. 0,69 A.
6. 1 A; 3 A; 2 A; 3 A; 5 A.
7. 2 A; 1 A; 1 A; 2 A; 1 A: 3 A.
7. 4 A; 3 A; 3 A; 2 A; 4 A; 4 A; 1 A; 1 A; 4 A; 0.

# 6. ELEKTROMAGNETIZAM

## 6.1. OSNOVNE VELIČINE U ELEKTROMAGNETIZMU

### 6.1.1. Osnovni pojmovi i formule

Prostor oko svakog magneta ili provodnika kroz koji protiče električna str uja nalazise u posebnom fizičkom stanju. Ovaj prostor nazivamo magnetskim poljem.

Magnetska indukcija $(\overline{B})$ je vektorska veličina. Sila koja deluje na element provodnika $l_0$ sa strujom $I_0$ iznosi:

$$F_0 = B \cdot l_0 \cdot I_0 \,[\mathrm{N}] \tag{6.1.1}$$

Za homogeno polje (sl. 6.1.1) magnetska indukcija, prema izrazu 6.1.1, iznosi:

$$B = \frac{F}{I \cdot l} \,[\mathrm{T}]$$

gde su:

$F$ [N] — sila koja deluje na provodnik sa strujom u magnetskom polju,

$l$ [m] — aktivna dužina provodnika,

$I$ [A] — struja,

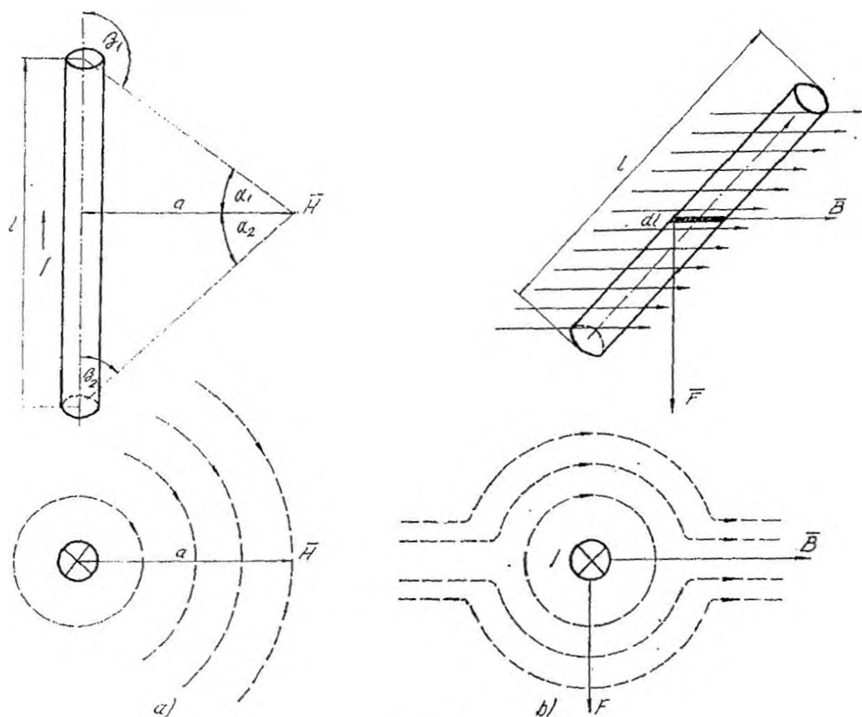
$B$ [T] — magnetska indukcija.

Jedinica magnetske indukcije je:

$$B = \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A \cdot m}}\right] = \left[\frac{\mathrm{V \cdot A \cdot s}}{\mathrm{m \cdot A \cdot m}}\right] = \left[\frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{m^2}}\right] = 1\,\mathrm{T}\ \text{(tesla)}.$$

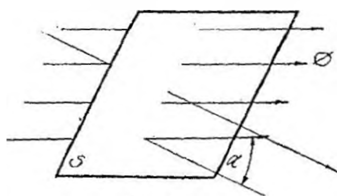
U CGS sistemu jedinica za merenje magnetske indukcije je 1 gaus (oznaka G). Između tesle i gausa postoji odnos:

$$1\,T = 10^4\,G$$




Sl. 6.1.1

Magnetski tok (tok vektora magnetske indukcije) za homogeno polje (sl. 6.1.2):




Sl. 6.1.2

$$\Phi = B \cdot S \cdot \cos \alpha \qquad (6.1.2)$$

Ako je $\alpha = 0$ (vektor $B$ magnetske indukcije vertikalan je na površinu $S$), onda je:

$$\Phi = B \cdot S \qquad (6.1.3)$$

gde je $S\,(\mathrm{m}^2)$ površina probodena magnetskim tokom.

Jedinica magnetskog toka je:

$$\Phi = [1 \cdot T \cdot 1\, m^2] = \left[\frac{V \cdot s}{m^2} \cdot m^2\right] = [V \cdot s] = 1\ Wb\ (\text{veber})$$

U CGS sistemu jedinica za merenje magnetskog toka je 1 maksvel (oznaka M). Između vebera i maksvela postoji odnos: $1\ Wb = 10^8\ M$.

Jačina magnetskog polja ($H$) je vektorska veličina, koja karakteriše intenzitet i veličinu magnetskog polja, ali ne zavisi od svojstva sredine.

Uzećemo nekoliko primera izračunavanja jačine magnetskog polja.

a) Jačina magnetskog polja pravolinijskog provodnika sa strujom (sl. 6.1.1a):

$$H = \frac{I}{4\pi a}(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2) \qquad (6.1.4)$$

ili:

$$H = \frac{I}{4\pi a}(\cos\beta_1 - \cos\beta_2), \qquad (6.1.5)$$

gde je $a$(m) rastojanje od provodnika do tačke u kojoj određujemo vrednost $H$.

Ako je dužina provodnika $l \gg a$, to je $a_1 \approx a_2 \approx 90°$ $\beta \approx 0$, $\beta_2 \approx 180$, onda je:

$$H = \frac{I}{2\pi a} \qquad (6.1.6)$$

Jedinica jačine magnetskog polja je:

$$H = \left[\frac{A}{m}\right]$$

U CGS sistemu jedinica za merenje magnetskog polja je 1 ersted (oznaka Oe):

$$\frac{1\,A}{m} = 12{,}56 \cdot 10^{-2}\ Oe$$

b) Jačina magnetskog polja u vazduhu (vakuumu) iznosi:

$$H = \frac{B}{\mu_0}$$

gde je $\mu_0 = \frac{B}{H}$ apsolutni permeabilitet vakuuma.

Jedinica permeabiliteta je:

$$\mu_0 = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{H}} = \left[\frac{\mathrm{T}}{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}}\right] = \left[\frac{\mathrm{V \cdot s}}{\frac{\mathrm{m^2\,A}}{\mathrm{m}}}\right] = \left[\frac{\mathrm{V \cdot s}}{\mathrm{A \cdot m}}\right] = \left[\frac{\Omega \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{m}}\right] = \left[\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}\right]$$

gde je H (henri) jedinica za induktivitet (vidi izraz 6.5.5).

Magnetska propustljivost (permeabilitet) vakuuma iznosi:

$$\mu_0 = 4\,\pi\,10^{-7} = 1{,}256 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$$

c) Jačina magnetskog polja u feromagnetskoj sredini je:

$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{B}{\mu_0\,\mu_r} \tag{6.1.8}$$

gde je $\mu\left[\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}\right]$ – magnetska propustljivost sredine ili permeabilitet, a

$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$ – relativni permeabilitet.

d) Jačina magnetskog polja kružnog (prstenastog) provodnika (sl. 6.1.3a) iznosi:

$$H = \frac{I}{2 \cdot R}\sin^2\alpha \tag{6.1.9}$$

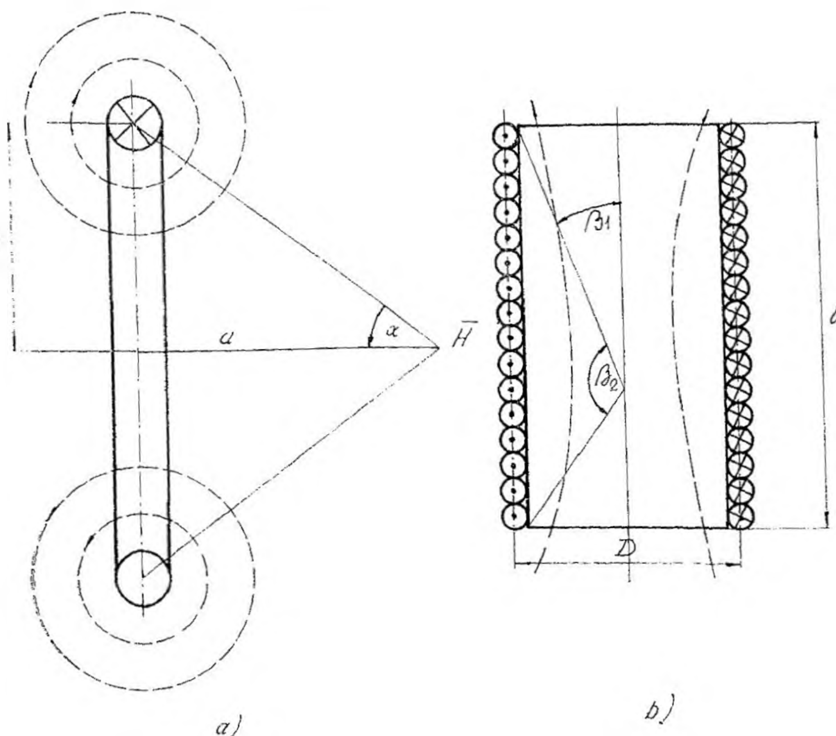
U centru provodnika ($\alpha = 90°$) jačina magnetskog polja je:

$$H = \frac{I}{2 \cdot R} \tag{6.1.10}$$

gde je $R$(m) radijus prstena.

e) Jačina magnetskog polja svitka (solenoida) u bilo kojoj njegovoj osi (sl. 6.1.3b) iznosi:

$$H=\frac{I\cdot W}{2\cdot l}(\cos\beta_1-\cos\beta_2) \qquad (6.1.11)$$




Sl. 6.1.3

gde su:

$W$ — broj navoja,

$I\cdot W$ [A] — magnetopobudna sila (magnetski napon),

$l$ [m] — dužina svitka (solenoida),

$R$ [m] — radijus solenoida.

Ako je $l \gg R$, tada je $\beta_1 \approx 0$ i $\beta_2 = 180°$, pa je onda:

$$H=\frac{I\cdot W}{l}\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right] \qquad (6.1.12)$$

Sila u njutnima (N), koja deluje na provodnik dužine $l$ sa strujom $I$, koji se nalazi u homogenom magnetskom polju, iznosi:

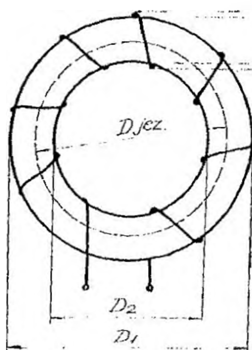
$$F = B \cdot l \cdot I \sin a \, [\text{N}] \qquad (6.1.13)$$

gde je:

$$1 \text{ N} = 0,102 \, [\text{kp}] \text{ ili } 1 \text{ kp} \approx 9,8 \text{ N}$$

### 6.1.2. Primeri

**1. primer:** Na prstenastom jezgru (sl. 6.1.4) od nemagnetskog materijala raspoređen je namotaj koji se sastoji od 300 navoja. Prečnik provodnika je $d = 0,8$ mm. Dimenzije prstena su: spoljni prečnik $D_1 = 60 \text{ mm} = 6 \text{ cm}$, unutrašnji prečnik $D_2 = 50 \text{ mm} = 5 \text{ cm}$. Struja $I = 1,5$ A. Izračunati jačinu polja, magnetsku indukciju i magnetski tok.



Sl. 6.1.4

Rešenje: Srednji prečnik prstena je:

$$D_{sr} = \frac{D_1 + D_2}{2} = \frac{6+5}{2} = 5,5 \text{ cm}$$

Srednja dužina magnetskih sila iznosi:

$$l_{sr} = \frac{(6+5)}{2} \cdot \pi = 17,3 \text{ cm}$$

Jačina magnetskog polja je:

$$H = \frac{I \cdot W}{l_{sr}} = \frac{1,5 \cdot 300}{17,3} = 26 \frac{\text{A}}{\text{cm}} = 26 \cdot 10^2 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Magnetska indukcija iznosi:

$$B = \mu_0 \cdot H = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 26 \cdot 10^2 = 32,7 \cdot 10^{-4} \text{ T}$$

Srednji prečnik preseka prstena (uzimamo u obzir i prečnik provodnika) iznosi:

$$D' = \frac{D_1 - D_2}{2} + d = \frac{6-5}{2} + 0{,}08 = 0{,}5 + 0{,}08 = 0{,}58 \text{ cm}$$

Površina poprečnog preseka prstena je:

$$S = \frac{\pi \cdot 0{,}58^2}{4} = 0{,}264 \text{ cm}^2 = 0{,}264 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

Magnetski tok iznosi:

$$\Phi = B \cdot S = 32{,}7 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}264 \cdot 10^{-4} = 8{,}6 \cdot 10^{-8} \text{ Wb}$$

**2. primer:** Na keramičkom prstenastom jezgru s prečnicima $D_1 = 120$ mm, $D_2 = 85$ mm namotan je u jednom sloju namotaj od provodnika prečnika $d = 1{,}6$ mm, tako da navoji na unutrašnjem delu jezgra priležu jedan uz drugi. Koliko je navojaka namotano na jezgru i koliki su jačina magnetskog polja i magnetski tok, ako je struja koja protiče kroz namotaj $I = 2{,}2$ A?

Rešenje: Unutrašnji obim prstenastog jezgra je:

$$L = \pi D_2 = 3{,}14 \cdot 85 = 267 \text{ mm}$$

Unutrašnji prečnik je:

$$D_{un} = D_2 - d = 85 - 2 \cdot 0{,}8 = 83{,}4 \text{ mm}$$

Broj navojaka iznosi:

$$W = \frac{L}{d} = \frac{267}{1{,}6} = 167.$$

Srednja dužina silnica je:

$$l_{sr} = \frac{D_1 = D_2}{2} \pi = \frac{12 + 8{,}5}{2} \cdot 3{,}14 = 32{,}2 \text{ cm}$$

Jačina polja je:

$$H = \frac{I \cdot W}{l_{sr}} = \frac{2{,}2 \cdot 167}{32{,}2} = 11{,}4 \frac{\text{A}}{\text{cm}} = 11{,}4 \cdot 10^2 \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Magnetska indukcija iznosi:

$$B = \mu_0 H = 4\pi\, 10^{-7} \cdot 11{,}4 \cdot 10^2 = 14{,}3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T}$$

Srednji prečnik prstena (uzimamo u obzir i prečnik provodnika) je:

$$D_{sr} = \frac{12-8{,}5}{2} + 0{,}16 = 1{,}91\,\mathrm{cm}$$

Površina poprečnog preseka prstena iznosi:

$$S = \frac{\pi \cdot 1{,}91^2}{4} = 2{,}86\,[\mathrm{cm}^2] = 2{,}86 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2$$

Magnetski tok je:

$$\Phi = B \cdot S = 14{,}3 \cdot 10^{-4} \cdot 2{,}86 \cdot 10^{-4} = 40{,}9 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{Wb}$$

### 6.1.3. Zadaci za samostalno rešavanje

1. Odrediti silu u njutnima koja deluje na provodnik dužine $l = 0{,}25$ m, postavljen u magnetsko polje s indukcijom $B = 1{,}5$ T, ako kroz njega prolazi struja $I = 10$ A. Provodnik je postavljen pod uglom $\alpha = 30°$ u odnosu na magnetske silnice.

2. Izračunati magnetsku indukciju polja, u kome na provodnik dužine $l = 0{,}2$ m, koji je postavljen pod uglom $\alpha = 90°$ prema silnicama, deluje sila $F = 100$ N pri proticanju struje kroz provodnik od $I = 5$ A.

3. U magnetsko polje s indukcijom $B = 0{,}5$ T stavljen je provodnik dužine $l = 0{,}4$ m. Postavljen je pod uglom $\alpha = 30°$ u odnosu na magnetske silnice. Kroz provodnik protiče struja $I = 10$ A. Kolika sila deluje na provodnik?

4. Kroz provodnik dužine $l = 0{,}5$ m, postavljen u magnetskom polju, protiče struja $I = 2$ A i na njega deluje silom $F = 1$ N. Odrediti vrednost magnetske indukcije.

5. Kolika će sila delovati na provodnik dužine $l = 60$ cm sa strujom $I = 1{,}5$ A postavljen u magnetskom polju indukcije $B = 2$ T?

6. Na provodnik dužine $l = 0{,}4$ m, postavljen u magnetsko polje, deluje sila $F = 0{,}96$ N pri proticanju struje od $I = 1{,}2$ A. Odrediti vrednost magnetske indukcije.

7. Na provodnik dužine $l=0{,}25$ m postavljen u homogenom polju s indukcijom $B=2000$ G deluje sila $F=0{,}5$ N. Provodnik je postavljen pod uglom od 90° u odnosu na linije magnetskog polja. Kolika struja protiče kroz provodnik?

8. Odrediti silu koja deluje na provodnik dužine $l=20$ cm, a koji je postavljen u homogeno magnetsko polje indukcije $B=1$ T pod uglom $\alpha=60°$, ako kroz njega protiče struja $I=20$ A.

9. U magnetskom polju indukcije $B=15\,000$ G postavljen je pod uglom $\alpha=45°$ prema magnetskim silnicama provodnik kroz koji protiče struja $I=2$ A. Kolika treba da je dužina provodnika, ako na njega deluje sila $F=2$ N?

10. Odrediti jačinu magnetskog polja stvaranog strujom $I=10$ A u provodniku na rastojanju od njega $l=100$ cm pri $\alpha=45°$ (sl. 6.1.1).

11. Pri kojoj struji u provodniku jačina magnetskog polja u tački udaljenoj od ose za 20 cm treba da iznosi $H=20$ A/m?

12. Kolika treba da je jačina magnetskog polja stvarana strujom $I=10$ A u pravolinijskom provodniku na rastojanju od njega $l=0{,}025$ m, ako je $\alpha_1=\alpha_2=60°$?

13. Kolika struja protiče kroz prsten radijusa $R=12{,}56$ cm, ako je jačina polja u centru prstena $H=1$ Oe?

14. Na prstenastom jezgru (sl. 6.1.4) od nemagnetskog materijala postavljen je namotaj koji se sastoji od 80 navojaka, a izveden je provodnicima prečnika $d=1{,}2$ mm. Dimenzije jezgra: spoljni prečnik $D_1=45$ mm, unutrašnji prečnik $D_2=38$ mm, struja $I=2{,}4$ A. Izračunati jačinu magnetskog polja, magnetsku indukciju i magnetski tok.

15. Prstenasti namotaj ima površinu poprečnog preseka $S=3{,}5$ cm$^2$, a broj navoja $W=250$. Srednja dužina magnetskih linija je $l_{sr}=35$ cm. Kolika je jačina struje neophodna za stvaranje magnetskog toka $\Phi=6{,}5\cdot10^{-7}$ Wb?

16. Rešiti 14. zadatak ako je zadato $D_1=66$ mm, $D_2=46$ mm, $d=1{,}5$ mm, $W=75$ navoja i $I=3{,}5$ A.

17. Koliko je amper-navoja potrebno da bismo u prstenastom namotaju preseka $S=2{,}85$ cm$^2$, čija je srednja dužina magnetskih linija $l_{sr}=42$ cm, stvorili magnetski tok $\Phi=8{,}2\cdot10^{-7}$ Wb?

18. Cilindrični namotaj (sl. 6.1.3b) dužine $l = 23$ cm sa srednjim prečnikom $D_{sr} = 2,5$ cm ima 210 navoja kroz koje protiče struja $I = 1,8$ A. Izračunati jačinu magnetskog polja, magnetsku indukciju i magnetski tok.

19. Odrediti jačinu magnetskog polja na osi svitka, koji ima dužinu $l = 0,5$ m i sastoji se od 100 navoja kroz koje protiče struja $I = 2,4$ A, ako su uglovi $\beta_1 = 60°$ i $\beta_2 = 90°$ (sl. 6.1.3b).

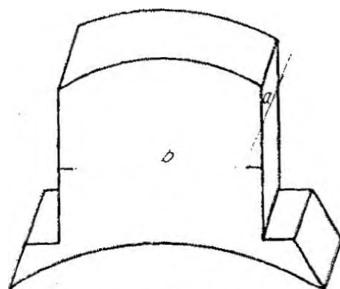
20. Odrediti broj navoja svitka čija je dužina $l = 15$ cm, površina poprečnog preseka $S = 3\ cm^2$, ako se u njemu stvara magnetski tok $\Phi = 300$ Mx pri struji $I = 5$ A.

21. Odrediti jačinu polja na osi svitka dužine $l = 0,1$ m, ako kroz njega protiče struja $I = 1$ A; broj navojaka je $W = 200$ i uglovi $\beta_1 = 60°$ i $\beta_2 = 90°$ (sl. 6.1.3b).

22. Odrediti broj navojaka svitka dužine $l = 200$ mm, koji stvara jačinu polja $H = 3140$ A/m pri struji $I = 0,25$ A, ako je $\beta_1 = 0°$ i $\beta_2 = 180°$.

23. Koliku struju je neophodno propustiti kroz svitak dužine $l = 25,12$ cm, poprečnog preseka $S = 4\ cm^2$, koji ima 600 navojaka, za stvaranje magnetskog toka $\Phi = 360$ Mx?

24. Koliko navoja treba da ima svitak dužine $l = 150$ mm, površine poprečnog preseka $S = 3\ cm^2$, ako pri struji $I = 5$ A magnetski tok u njemu treba da bude $\Phi = 0,000003$ Wb?



Sl. 6.1.5

25. Magnetski tok probada polove mašine jednosmerne struje i iznosi $\Phi = 0,011$ Wb. Kolika treba da je magnetska indukcija u čeliku od koga su napravljeni polovi, ako su dimenzije polova $a = 10$ cm i $b = 20$ cm (sl. 6.1.5)?

26. U magnetsko polje jačine $H = 628$ A/m postavljena je pravolinijska čelična greda poprečne površine $20 \times 40$ mm i dužine $l = 100$ mm. Odrediti relativnu magnetsku propustljivost i magnetsku indukciju grede, ako je magnetski tok u njoj $\Phi = 100000\ Mx = 0,001$ Wb.

27. Odrediti vrednost magnetske indukcije u polu električnog motora jednosmerne struje ako je magnetski tok u njemu $\Phi = 11890000$ Mx. Dimenzije pola su $a = 305$ mm i $b = 230$ mm (sl. 6.1.5).

28. Prsten kružnog preseka od mekog ugljeničnog čelika, čije su dimenzije $D = 22$ cm i $d = 2$ cm, namotan je ravnomerno sa $W$ 600 navojaka. Ako je struja 4 A, izračunati magnetski fluks $\Phi$.

29. Za prsten od gvožđa sa silicijumom i dimenzijama kao u prethodnom zadatku odrediti vrednosti struje $I$ da bi magnetski fluks bio $\Phi = 440$ mWb.

## 6.2. NERAZGRANATA MAGNETSKA KOLA

### 6.2.1. Osnovni pojmovi i formule

Magnetskim kolom naziva se put kojim se prostiru magnetske silnice kroz gvožđe, vazduh ili druge materijale.

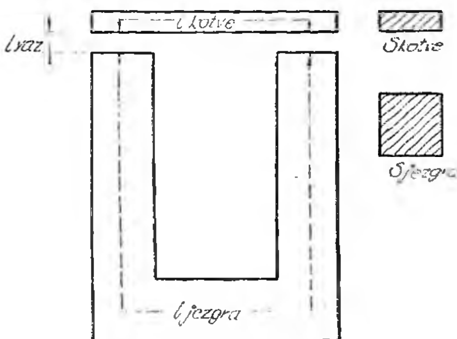
Magnetski tok nerazgranatih homogenih magnetskih kola prikazan je na sl. 6.2.1.

Omov zakon za magnetsko kolo glasi.

$$\Phi = B \cdot S_{jez.} = \mu \cdot H \cdot S_{jez.} = \mu_r \cdot \mu_0 \frac{I \cdot W}{l_{jez.}} S_{jez.} \qquad (6.2.1)$$

ili:

$$\Phi = 4\pi\, 10^{-7} \frac{I \cdot W}{\dfrac{l_{jez.}}{\mu_r S_{jez.}}} = 4\pi\, 10^{-7} \frac{M}{R_M} \qquad (6.2.2)$$



Sl. 6.2.1

gde su:

$M = U_m = I \cdot W$ [A] — magnetomotorna sila, magnetopobudna sila ili magnetni napon,

$R_M = \dfrac{l_{jez.}}{\mu_r \cdot S_{jez.}}$ — magnetni otpor magnetskog kola,

$l_{jez}$ · [m] — srednja dužina magnetskih linija u jezgru,

$S_{jez}$ · [m²] — površina poprečnog preseka jezgra.

Jedinica magnetskog otpora je:

$$R_M=\frac{M}{\Phi}=\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Wb}}\right]=\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V\cdot s}}\right]=\left[\frac{1}{\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}\cdot \mathrm{s}}\right]=\left[\frac{1}{\Omega \mathrm{s}}\right]=\left[\frac{1}{\mathrm{H}}\right]$$

Zakon proticanja fluksa za nerazgranato magnetsko kolo koje se sastoji od $n$ delova, glasi:

$$I\cdot W=\sum_{k=1}^{n} H_k\cdot l_k \tag{6.2.3}$$

Za magnetsko kolo, koje se sastoji od jezgra, jarma (rotora) i vazdušnog zazora (sl. 6.2.1) važi:

$$\Sigma I\cdot W=(I\cdot W)_{jez.}+(I\cdot W)_{jar.}+(I\cdot W)_{vaz.} \tag{6.2.4}$$

ili:

$$\Sigma I\cdot W=H_{jez.}\cdot l_{jez.}+H_{jar.}\cdot l_{jar.}+H_{vaz.}\cdot l_{vaz.} \tag{6.2.5}$$

Postoje dva metoda proračuna magnetskih kola. Pri proračunu obično dajemo dimenzije magnetskog kola za određivanje srednje dužine magnetskih silnica $l_{sr}$ i površine poprečnog preseka svakog dela, a takođe i materijal od koga je napravljeno magnetsko kolo. Pri tome treba da imamo krivu magnetiziranja $B=f(H)$ ili tablicu.

Prvi metod se sastoji u tome da veličinu magnetskog napona ($U_m=I\cdot W$) odredimo prema zadatom magnetskom toku $\Phi$ za dato jezgro.

a) Za svaki magnetski deo $k$ odredimo vrednost magnetske indukcije:

$$B_k=\frac{\Phi}{S_k}\ [\mathrm{T}] \tag{6.2.6}$$

b) Iz krive magnetiziranja $B_k=f(H_k)$ za izabrani feromagnetski materijal odredimo jačinu polja $H_k=I\cdot W_k$.

Za nemagnetske delove (vazdušni zazor) jačina magnetskog polja iznosi:

$$H_{vaz.}=\frac{B_{jez.}}{\mu_0}=\frac{B_{jez.}}{4\pi\ 10^{-7}}\approx 80\cdot 10^4 B_{jez.}\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right] \tag{6.2.7}$$

c) Magnetski napon ($U_m$) potreban za stvaranje magnetskog toka u magnetskom kolu koje sastoji od $n$ delova iznosi:

$$I \cdot W = \sum_{k=1}^{n} H_k \cdot l_k \tag{6.2.8}$$

Na primer, za sl. 6.2.1 imamo:

$$I \cdot W = (I \cdot W)_{jez.} + (I \cdot W)_{jar.} + 2\,(I \cdot W)_{vaz.} \text{ ili}$$

$$I \cdot W = H_{jez.} \cdot l_{sr.\,jez.} + H_{jar.} \cdot l_{sr.\,jar.} + 2\,H_{vaz.} \cdot l_{sr.\,vaz.}$$

D r u g i  m e t o d. Prema zadatim amper-navojima $I \cdot W$ određuje se veličina magnetskog toka $\Phi$.

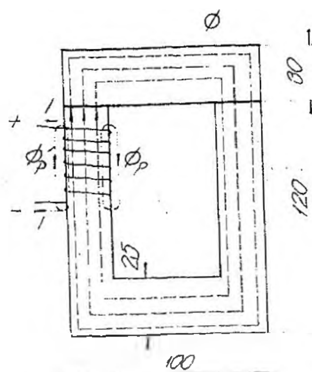
Pošto pravu zavisnost između $\Phi$ i $H$ nemamo, a između $B$ i $H$ zavisnost je nelinearna, proračun treba izvršiti grafoanalitičkim putem.

a — Dajući nekoliko vrednosti magnetskog toka $\Phi$, određujemo za svaki slučaj magnetski napon ($I \cdot W$).

b — Prema dobijenim vrednostima crtamo krivu $\Phi = f(I \cdot W)$ i prema njoj nalazimo vrednost magnetskog toka $\Phi$ za zadate amper-navoje ($I \cdot W$).

### 6.2.2. **Primer**

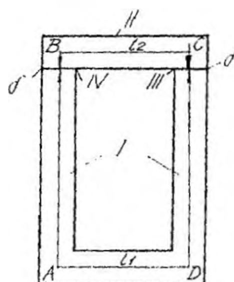
**1. primer:** U jezgru od čelika, čije su dimenzije u mm date na sl. 6.2.2, magnetski tok je $\Phi = 7{,}5 \cdot 10^{-4}$ Wb. Izračunati struju u namotaju koji ima 187 navoja, magnetsku propustljivost čelika i otpor delova magnetskog kola, ako je debljina magnetskog kola 25 mm i ako na mestu sastava jarma sa II jezgrom postoje vazdušni zazori dužine $\delta = 0{,}25$ mm (svaki zazor ima ovu dužinu).



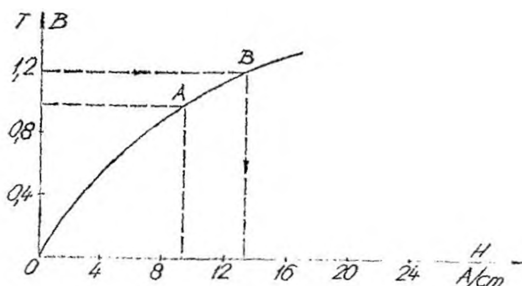
Sl. 6.2.2

R e š e n j e: Pri proračunu magnetsko kolo rastavimo na delove. Svaki deo mora biti napravljen od istog materijala, a jačina magnetskog polja $\left(H = \dfrac{B}{\mu}\right)$ u njemu treba da je konstantna.

Treba obratiti pažnju da u nerazgranatom magnetskom kolu tok $\Phi$ ostaje isti u celom kolu. Za naš primer imamo četiri dela (sl. 6.2.3).



Sl. 6.2.3



Sl. 6.2.4

Deo I, čija površina preseka iznosi $S_1 = 25 \cdot 25 = 625\ \text{mm}^2 = 6{,}25 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$, ima magnetsku indukciju:

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1} = \frac{7{,}5 \cdot 10^{-4}}{6{,}25 \cdot 10^{-4}} = 1{,}2\ \text{T}$$

i prema krivoj magnetiziranja (sl. 6.2.4) jačina polja iznosi $H_1 = 13\ \text{A/cm} = 1300\ \text{A/m}$ (tačka $B$ na sl. 6.2.4).

Za deo II površina iznosi:

$$S_2 = 3{,}0 \cdot 2{,}5 = 7{,}5\ \text{cm}^2 = 7{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$$

a indukcija:

$$B_2 = \frac{\Phi}{S_2} = \frac{7{,}5 \cdot 10^{-4}}{7{,}5 \cdot 10^{-4}} = 1\ \text{T} \text{ i jačina magnetskog polja:}$$

$H_2 = 9{,}2\ \text{A/cm}$ (tačka $A$ na sl. 6.2.4).

Za delove III i IV (vazdušni zazori) površine su iste kao i za deo I, tj. $S_3 = S_4 = S_1 = 6{,}25\ \text{cm}^2$. Saglasno tome biće i magnetske indukcije $B_4 = B_3 = B_1 = 1{,}2\ \text{T}$.

Magnetska propustljivost vazduha jednaka je praktično magnetskoj propustljivosti vakuuma, tj. $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{H}}{\text{m}}$. Zbog toga je jačina polja:

$$H_3 = H_4 = \frac{B_3}{\mu_0} = \frac{1{,}2}{4\pi\ 10^{-7}} = 9{,}6 \cdot 10^5\ \text{A/m} = 9600\ \text{A/cm}$$

Sada ćemo izračunati struju u namotaju koristeći se formulom 6.2.3:

$$I \cdot W = H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + H_3 \cdot l_3 + H_4 \cdot l_4$$

Prema dimenzijama magnetskog kola (sl. 6.2.3) dobijamo: $l_1 = 29$ cm i $l_2 = 10{,}5$ cm. Prema uslovu zadatka je $l_3 = l_4 = \delta = 0{,}025$ cm.

Uvršćujući nađene vrednosti za $H$ i $l$ u gornju jednačinu dobijamo:

$$I \cdot W = 13 \cdot 29 + 9{,}2 \cdot 10{,}5 + (9600 \cdot 0{,}025) \cdot 2 \approx 953 \text{ A}$$

Sada ćemo izračunati magnetske otpore. Za delove magnetskog kola možemo sastaviti jednačine analogno Omovom zakonu za delove električnog kola, tj. napisati magnetski napon u obliku proizvoda (prema izrazu 6.2.2):

$$U_M = \Phi \cdot R_M$$

odakle sledi za magnetski otpor:

$$R_M = \frac{U_M}{\Phi} = \frac{H \cdot l}{B \cdot S} = \frac{l}{\mu \cdot S}$$

Izračunajmo radi toga magnetske permeabilitete za delove I i II (sl. 6.2.3):

$$\mu_1 = \frac{B_1}{H_1} = \frac{1{,}2}{1300} = 9{,}25 \cdot 10^{-4} \frac{\text{H}}{\text{m}}$$

$$\mu_2 = \frac{B_2}{H_2} = \frac{1}{920} = 10{,}9 \cdot 10^{-4} \frac{H}{\text{m}}$$

Magnetski otpori tih delova iznose:

$$R_{M1} = \frac{l_1}{\mu_1 S_1} = \frac{0{,}29}{9{,}25 \cdot 10^{-4} \cdot 6{,}25 \cdot 10^{-4}} = 5{,}02 \cdot 10^5 \frac{1}{\text{H}}$$

$$R_{M2} = \frac{l_2}{\mu_2 S_2} = \frac{0{,}105}{10{,}9 \cdot 10^{-4} \cdot 7{,}5 \cdot 10^{-4}} = 1{,}29 \cdot 10^5 \frac{1}{\text{H}}$$

Magnetski otpori vazdušnih zazora su:

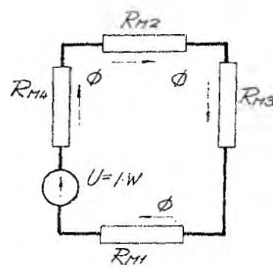
$$R_{M3} = R_{M4} = \frac{l_3}{\mu_0 S_3} = \frac{0{,}25 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 6{,}25 \cdot 10^{-4}} = 3{,}19 \cdot 10^5 \frac{1}{\text{H}}$$

Dobijeni rezultati pokazuju da su magnetski otpori čeličnih delova (I i II) i vazdušnih zazora gotovo jednaki, ali dužine tih delova se razlikuju za približno 800 puta. To je lako shvatiti ako znamo da je relativni permeabilitet čelika mnogo veći od permeabiliteta vazduha.

Za relativne permeabilitete možemo napisati:

$$\mu_{r1} = \frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{9{,}5 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 10^{-7}} \approx 740$$

$$\mu_{r2} = \frac{\mu_1}{\mu_0} = \frac{10{,}9 \cdot 10^{-4}}{4\pi \cdot 10^{-7}} \approx 870$$

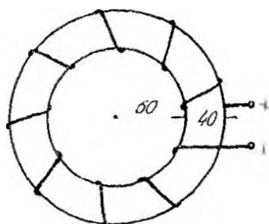


Sl. 6.2.5

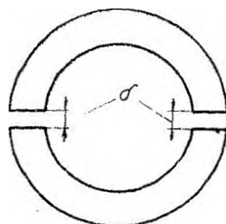
Poznavajući magnetske otpore svih delova posmatranog magnetskog kola, možemo za njega sastaviti ekvivalentnu električnu šemu (sl. 6.2.5).

### 6.2.3. Zadaci za samostalno rešavanje

1. Na prstenastom jezgru od livenog čelika, čije su dimenzije date na sl. 6.2.6 u milimetrima, raspoređen je namotaj od 925 navoja. Izračunati struju u namotaju i magnetski permeabilitet čelika pri magnetskom toku u jezgru od $1{,}25 \cdot 10^{-3}$ Wb.



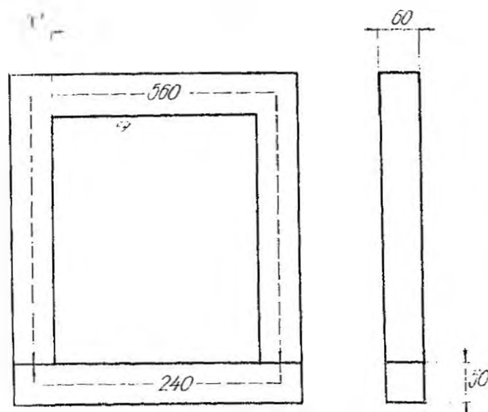
Sl. 6.2.6



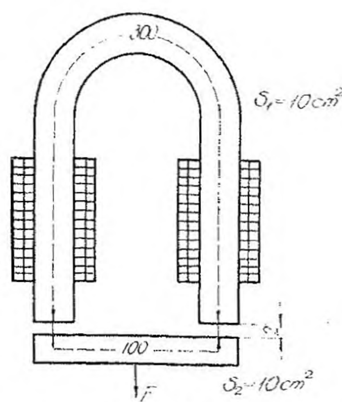
Sl. 6.2.7

2. Čelično jezgro iz prethodnog zadatka sastoji se iz dva dela (sl. 6.2.7) sa zazorom $\delta = 0{,}2$ mm. Izračunati struju u namotaju pri istom magnetskom toku kao u prethodnom zadatku.

3. Odrediti magnetsku indukciju i broj navoja neophodan za stvaranje magnetskog toka $\Phi = 360000$ Mx u magnetskom kolu. Struja kroz namotaj iznosi $I = 2$ A. Dimenzije su date u milimetrima na sl. 6.2.8



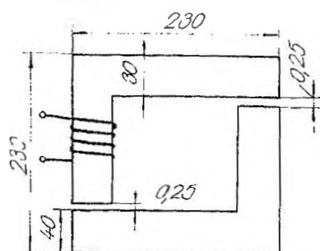

Sl. 6.2.8



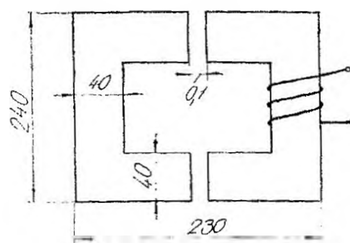

Sl. 6.2.9

4. Izračunati struju koju je neophodno propustiti kroz 4000 navoja namotaja elektromagneta napravljenog od livenog čelika. Magnetska indukcija jezgra je $B_1 = 1{,}4$ T, a kroz kotvu (rotor) prolazi 90% ukupnog magnetskog toka. Dimenzije u cm date su na sl. 6.2.9.

5. Izračunati magnetski napon $U_M$ namotaja ako u jezgru, na kojem je raspoređen namotaj (sl. 6.2.10), magnetska indukcija iznosi 1 T. Dimenzije u mm magnetskog kola date su na sl. 6.2.10.




Sl. 6.2.10




Sl. 6.2.11

6. Za jezgro iz 5. zadatka izračunati magnetski otpor.

7. Koliki magnetski napon treba da ima namotaj na jezgru od čelika (sl. 6.2.1), ako magnetska indukcija u zazoru (međugvožđu) iznosi 0,825 T? Sve dimenzije su u milimetrima.

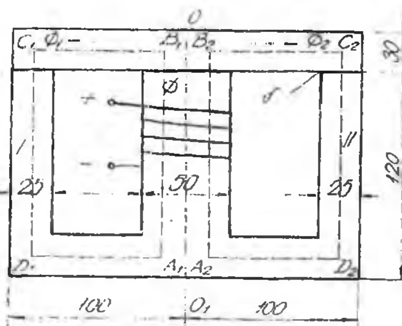
## 6.3. RAZGRANATA SIMETRIČNA KOLA

### 6.3.1. Osnovni pojmovi i formule

U sledećem primeru daćemo postupak proračuna ovakvih magnetskih kola.

### 6.3.2. Primer

**1. primer:** U srednjem jezgru magnetskog kola (sl. 6.3.1), izrađenom od mekog gvožđa, magnetski fluks je $\Phi = 5 \cdot 10^{-3}$ Wb. Izračunati magnetski napon namotaja, ako je debljina magnetskog kola 50 mm, a dužina svakog vazdušnog zazora $\delta = 0{,}25$ mm.



Sl. 6.3.1

Rešenje: Prvo ćemo svesti magnetsko kolo na ekvivalentno nerazgranato magnetsko kolo. Magnetski fluks $\Phi$ u srednjem jezgru magnetskog kola (sl. 6.3.1) jednak je sumi magnetskih fluksova $\Phi_1$ i $\Phi_2$, koji se zatvaraju u dva dela magnetskog kola sa srednjim linijama $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$, $A_1$ i $A_2$, $B_2$, $C_2$, $D_2$, $A_2$. Pošto posmatramo simetrično magnetsko kolo, tj. da imamo iste magnetske otpore delova po kojima se zatvaraju fluksovi $\Phi_1$ i $\Phi_2$ važi da je:

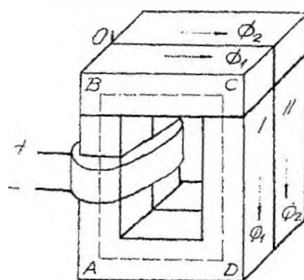
$$\Phi_1 = \Phi_2 = \frac{\Phi}{2} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{Wb}$$

Ako razrežemo magnetsko kolo uzduž ose simetrije $OO_1$ (sl. 6.3.1) dobijamo dva jednaka nerazgranata magnetska kola, čiji smo proračun već upoznali u primeru 6.2.2.1. Okrenemo li jedno od kola oko ose $OO_1$ za 180°, dobićemo ekvivalentno nerazgranato kolo (sl. 6.3.2) za koje je magnetski napon $U_M$ namotaja jednak sumi magnetskih napona po konturi $ABCDA$.

U zadatom simetričnom razgranatom kolu suma magnetskih napona uzduž srednje magnetske linije konture $A_1 B_1 C_1 D_1 A_1$ ili

$A_2 B_2 C_2 D_2 A_2$ (sl. 6.3.1) jednaka je sumi magnetskih napona uzduž konture *ABCDA* ekvivalentnog kola (sl. 6.3.2), pošto i odgovarajući delovi imaju iste jačine polja i dužine.

Znači, za simetrično razgranato magnetsko kolo (sl. 6.3.1) magnetski napon namotaja možemo izračunati kao sumu magnetskih napona po jednoj od kontura, na primer po konturi $A_1 B_1 C_1 D_1 A_1$.



Sl. 6.3.2

Sada ćemo izračunati magnetski napon namota. Upoređujući magnetsko kolo, razmatrano u primeru 6.2.2.1 (sl. 6.2.2) sa polovinom magnetskog kola (sl. 6.3.2) možemo videti da su dimenzije iste (sa izuzetkom debljine magnetskog kola).

Zato konturu $A_1 B_1 C_1 D_1 A_1$ (sl. 6.3.2) možemo rastaviti na iste delove (sl. 6.2.3) i po analogiji sa primerom 6.2.2.1 izračunati:

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1} = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-3}}{2{,}5 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 2\ \mathrm{T}$$

$$B_2 = \frac{\Phi_2}{S_2} = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-3}}{3{,}5 \cdot 10^{-4}} = 1{,}67\ \mathrm{T}$$

$$B_3 = B_4 = B_1 = 2\ \mathrm{T}$$

Prema dobijenim vrednostima za magnetsku indukciju iz karakteristike magnećenja dobijamo za jačinu polja:

$$H_1 = 6{,}2 \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{cm}}\right] \quad \mathrm{i} \quad H_2 = 2{,}4 \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{cm}}$$

Za vazdušne zazore jačine polja su:

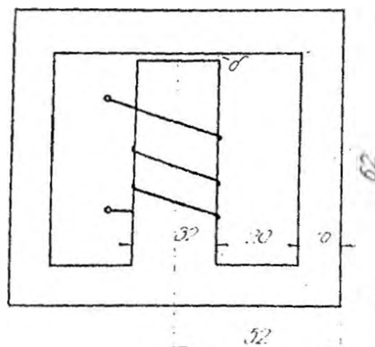
$$H_3 = H_4 = \frac{B_3}{\mu_0} = \frac{2}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}} = 1{,}6 \cdot 10^6 \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = 1{,}6 \cdot 10^4 \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{cm}}$$

Pri dužinama $l_1 = 29$ cm i $l_2 = 10{,}5$ cm (dobijenim u primeru 6.2.2.1) magnetski napon je:

$$I \cdot W = H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + H_3 \cdot l_3 + H_4 \cdot l_4 = 6{,}2 \cdot 29 + 2{,}4 \cdot 10{,}5 + \\ + (1{,}6 \cdot 10^4 \cdot 0{,}025) \cdot 2 \approx 1\,000\ \mathrm{A}$$

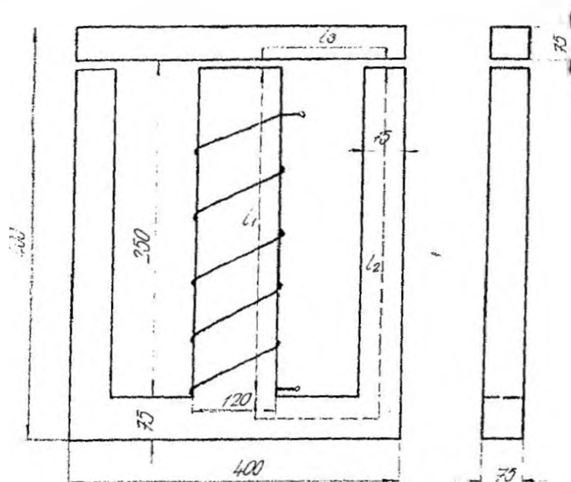
### 6.3.3. Zadaci za samostalno rešavanje

1. Na jezgru od livenog čelika raspoređen je namotaj sa $W = 1\,850$ navoja. Izračunati struju kroz namotaj, ako je magnetski fluks u zazoru ($\delta = 0{,}2$ mm) jednak $3{,}46 \cdot 10^{-4}$ Wb. Debljina jezgra je 16 mm. Ostale dimenzije date su na sl. 6.3.3.



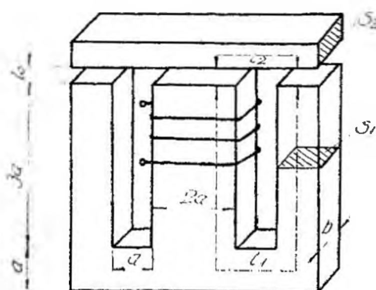

Sl. 6.3.3

2. Koliki treba da je magnetski fluks i magnetski napon u jezgru od livenog čelika, da bi u njemu bila indukcija $B = 1{,}4$ T pri prisustvu dva vazdušna zazora od po 0,1 mm (sl. 6.3.4)? Dimenzije su date u milimetrima.




Sl. 6.3.4

Magnetsko kolo (sl. 6.3.5) sastoji se od jezgra napravljenog od livenog čelika. Jezgro je oblika Ш-20 sa dimenzijama:




Sl. 6.3.5

$a = 1$ cm, $b = 3$ cm. Vazdušni zazor $\delta = 0{,}01$ cm. U jezgru treba da bude stvoren magnetski fluks $\Phi = 0{,}00021$ Wb. Izračunati vrednost magnetskog napona potrebnog za stvaranje datog magnetskog fluksa.

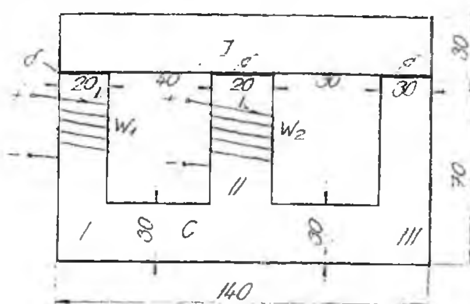
## 6.4. RAZGRANATA NESIMETRIČNA MAGNETSKA KOLA

### 6.4.1. Osnovni pojmovi i formule

I ovde ćemo u sledećem primeru dati postupak pri proračunu ovakvih magnetskih kola.

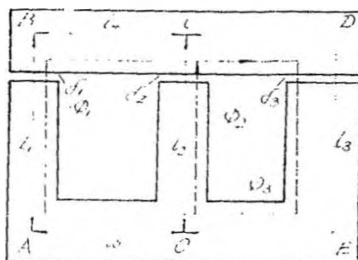
### 6.4.2. Primer

**1. primer:** Namotaji $W_1$ i $W_2$ (sl. 6.4.1) raspoređeni su na dva jezgra magnetskog kola, a u svakom od njih je magnetska indukcija 0,9 T. Izračunati magnetski napon namotaja, ako je jezgro izrađeno od livenog čelika. Vazdušni zazori iznose $\delta = 0{,}1$ mm, a debljina magnetskog kola je 20 mm.

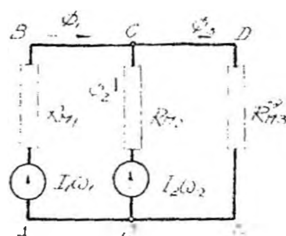



Sl. 6.4.1

Rešenje: Prvo ćemo podeliti magnetsko kolo na delove. Razmatrano magnetsko kolo kao što je prikazano na sl. 6.4.2 možemo podeliti na tri grane *OABC*, *OC* i *OEDC*, s magnetskim fluksovima $\Phi_1$, $\Phi_2$ i $\Phi_3$.



Sl. 6.4.2



Sl. 6.4.3

Polazeći od toga da u predelima jedne grane magnetski fluks ostaje isti, sastavimo za razmatrano magnetsko kolo ekvivalentnu električnu šemu (sl. 6.4.3) na kojoj su $R_{M1}$, $R_{M2}$ i $R_{M3}$ ukupni magnetski otpori odgovarajućih grana.

Celo magnetsko kolo podelimo na delove $l_1, \ldots l_5$ i $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta$ (sl. 6.4.2), od kojih se svaki karakteriše jednom vrednošću jačine polja. Prema dimenzijama magnetskog kola (na sl. 6.4.1) datim u milimetrima nalazimo $l_1 = l_2 = 70$ mm $= 7$ cm, $l_3 = 18$ cm, $l_4 = l_5 = 6$ cm, $S_1 = S_2 = 4 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2$, $S_3 = S_4 = S_5 = 6 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2$.

Napišimo prvi Kirhofov zakon za čvor *C* (sl. 6.4.3):

$$\Phi_3 = \Phi_1 + \Phi_2$$

U jezgrama I i II (sl. 6.4.1) magnetska indukcija (prema zadatku: 0,9 T) je jednaka, a jednake su i površine poprečnog preseka jezgra, pa dobijamo:

$$\Phi_1 = \Phi_2 = B_1 \cdot S_1 = 0{,}9 \cdot 4 \cdot 10^{-4} = 3{,}6 \cdot 10^{-4}\,\text{Wb}$$

$$\Phi_3 = \Phi_1 + \Phi_2 = 7{,}2 \cdot 10^{-4}\,\text{Wb}$$

Odrediti magnetsku indukciju i jačinu polja ostalih delova magnetskog kola (sl. 6.4.1):

$$B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3} = \frac{7{,}2 \cdot 10^{-4}}{6 \cdot 10^{-4}} = 1{,}2 \text{ T}$$

$$B_4 = \frac{\Phi_4}{S_4} = \frac{3{,}6 \cdot 10^{-4}}{6 \cdot 10^{-4}} = 0{,}6 \text{ T}$$

$$B_5 = B_4$$

Prema karakteristikama magnećenja za liveni čelik nalazimo:

$$H_1 = H_2 = 2{,}35 \text{ A/cm}, \; H_3 = 5{,}4 \text{ A/cm}, \; H_4 = H_5 = 1{,}1 \text{ A/cm}$$

U vazdušnim zazorima jačina polja iznosi:

$$H_{v1} = H_{v2} = \frac{B_1}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}} = \frac{0{,}9}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}} = 7\,200 \text{ A/cm}$$

$$H_{v3} = \frac{B_3}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}} = \frac{1{,}2}{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}} = 9\,600 \text{ A/cm}$$

Sada možemo izračunati magnetski napon namotaja, primenivši drugi Kirhofov zakon za dve konture magnetskog kola (sl. 6.4.2) ili njegovog ekvivalentnog električnog kola (sl. 6.4.3). Prema tome, za konturu *OCDEO* imamo:

$$I_2 \cdot W_2 = H_2 \cdot l_2 + H_{v2} \cdot \delta_2 + H_3 \cdot l_3 + H_{v3} \cdot \delta_3 = 2{,}35 \cdot 7 +$$

$$+ 7\,200 \cdot 0{,}01 + 5{,}4 \cdot 18 + 9\,600 \cdot 0{,}01 = 281 \text{ A}$$

a za konturu *OABCO*:

$$I_1 \cdot W_1 - I_2 \cdot W_2 = H_5 \cdot l_5 + H_1 \cdot l_1 + H_{v1} \cdot \delta_1 + H_4 \cdot l_4 - H_2 \cdot l_2 -$$

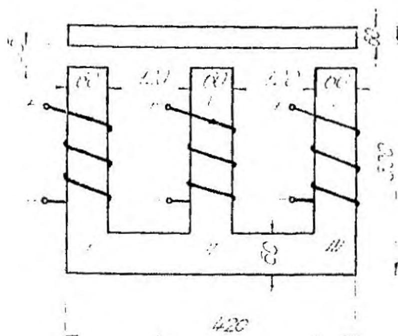
$$- H_{v2} \cdot \delta_2 = H_5 \cdot l_5 + H_4 \cdot l_4$$

Pošto je $H_1 \cdot l_1 = H_2 \cdot l_2$ i $H_{v1} \cdot \delta_1 = H_{v2} \cdot \delta_2$, dobijamo:

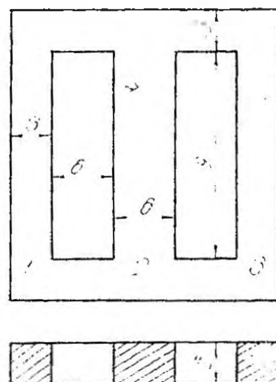
$$I_1 \cdot W_1 = I_2 \cdot W_2 + H_5 \cdot l_5 + H_4 \cdot l_4 = 281 + (1{,}1 \cdot 6) \cdot 2 = 294 \text{ A}$$

### 6.4.3. **Zadaci za samostalno rešavanje**

1. U jezgrima I i II (sl. 6.4.4) magnetska indukcija iznosi $B_1 = 0{,}8$ T i $B_2 = 0{,}6$ T. Magnetski napon prvog jezgra je $U_{M1} = I_1 \cdot W_1 = 900$ A. Izračunati magnetske napone druga dva namotaja ako je materijal magnetskog kola liveni čelik, a njegova debljina 60 mm. Smer struje dat je na slici.



Sl. 6.4.4



Sl. 6.4.5

2. Jezgro je izrađeno od feromagnetskog materijala. Oblik i dimenzije (u cm) date su na sl. 6.4.5. U jednom krajnjem jezgru postoji zazor, proračunat tako da je magnetska indukcija u njemu dva puta manja, nego u drugom krajnjem jezgru. Zadata je magnetska indukcija u zazoru $B_z = 0{,}1$ T. Odrediti magnetski napon za dva slučaja: a) $\mu = 500\,\mu_0$, b) $\mu = 1\,000\,\mu_0$.

## 6.5. ELEKTROMAGNETSKA INDUKCIJA

### 6.5.1. **Osnovni pojmovi i formule**

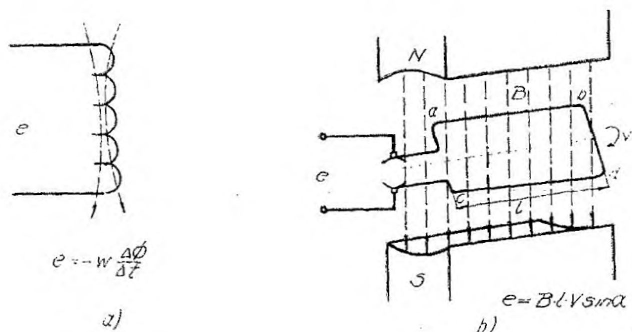
Elektromagnetskom indukcijom nazivamo pojavu stvaranja indukovane elektromotorne sile u zatvorenoj konturi pri promeni magnetskog fluksa kroz površinu, ograničenu tom konturom ili

pri kretanju konture, odnosno njenih delova u magnetskom polju. EMS indukcije ili indukovani napon (sl. 6.5.1) data je izrazima:

$$e=-W\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{d\varphi}{dt} \qquad (6.5.1)$$

$$e=-W\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \qquad (6.5.2)$$

$$e=B\cdot l\cdot v\cdot\sin\alpha \qquad (6.5.3)$$




Sl. 6.5.1

gde su:

$B$ [T] — magnetska indukcija,

$l$ [m] — aktivna dužina provodnika,

$V\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$ — brzina kretanja provodnika u magnetskom polju,

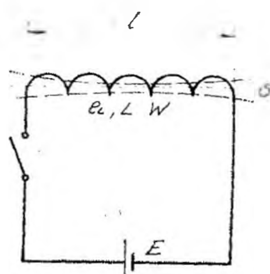
$W$ — broj navojaka,

$\frac{d\Phi}{dt}, \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\left[\frac{\text{Wb}}{\text{s}}\right]$ — brzina promene magnetskog fluksa,

$\varphi=W\Phi$ [Wb[ — ukupni fluks.

Samoindukcijom nazivamo pojavu stvaranja ems u električnom kolu pri promeni ukupnog fluksa samoindukcije toga kola (sl. 6.5.2).

Induktivitet (koeficijent samoindukcije) je skalarna veličina, koja karakteriše vezu između ukupnog fluksa samoindukcije i struje u posmatranom električnom kolu i jednak je odnosu ukupnog fluksa tog kola i struje u njemu.



Sl. 6.5.2

Induktivitet (koeficijent samoindukcije) dat je izrazom:

$$L = W\frac{d\Phi}{dI} = \frac{d\psi}{dI} \tag{6.5.4}$$

ili:

$$L = W\frac{\Delta\Phi}{\Delta I} = \frac{\Delta\psi}{\Delta I}$$

Statički induktivitet dat je izrazom:

$$L = \frac{\psi}{I} \tag{6.5.5}$$

Jedinica induktiviteta je:

$$L = \frac{\psi}{I} = \left[\frac{\text{Wb}}{\text{A}}\right] = \left[\frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}}\right] = [\Omega\text{s}] = 1 \text{ henri } [\text{H}]$$

Ems samoindukcije je data i izrazima:

$$e_L = -L\frac{dI}{dt} \tag{6.5.6}$$

ili:

$$e_L = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}$$

Induktivitet (koeficijent samoindukcije) namotaja iznosi:

$$L = \frac{W^2}{R_M} = \frac{W^2}{\frac{l_M}{\mu\cdot S_M}} = \mu\frac{W^2\cdot S_M}{l_M}$$

ili

$$L = \mu_r \cdot \mu_0 \frac{W^2 \cdot S_M}{l_M} = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \mu \frac{W^2 \cdot S_M}{l_M} \qquad (6.5.7)$$

gde su:

$R_M \left[\frac{1}{H}\right]$ — magnetski otpor,

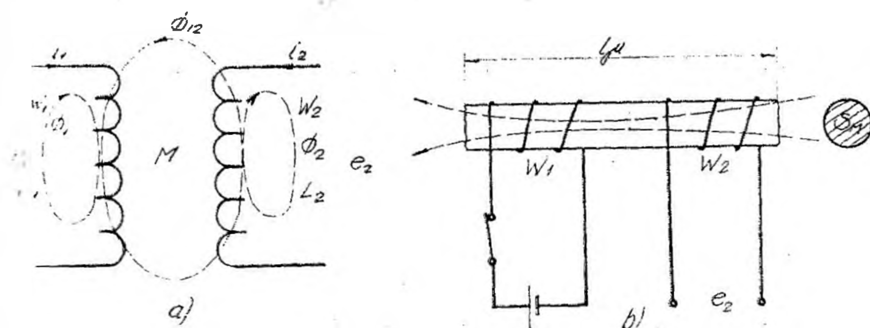
$S_M\,[m^2]$ — površina poprečnog preseka namotaja,

$l_M\,[m]$ — dužina namotaja,

$W$ — broj navoja namotaja.

Međusobnom indukcijom nazivamo pojavu stvaranja ems u električnom kolu pri promeni ukupnog fluksa međusobne indukcije u tom kolu.

Međuinduktivitet (koeficijent međusobne indukcije) je skalarna veličina, koja karakteriše vezu ukupnog fluksa međusobne indukcije jednog električnog kola i struje u drugom i jednak je odnosu ukupnog fluksa samoindukcije jednog kola i struje u drugom kolu.




Sl. 6.5.3

Međuinduktivitet dva magnetski povezana kola (sl. 6.5.3a iznosi:

$$M = W_2 \frac{d\Phi_{1-2}}{dI_1} \qquad M = W_2 \frac{\Delta\Phi_{1-2}}{\Delta I_1}$$

ili:

$$M = W_1 \frac{d\Phi_{2-1}}{dI_2} \qquad M = W_1 \frac{\Delta\Phi_{2-1}}{\Delta I_2} \qquad (6.5.8)$$

gde su:

$W_1$ i $W_2$ — brojevi navoja prve i druge konture,

$d\Phi_{1-2}$ i $\Delta\Phi_{1-2}$ — magnetski fluks stvaran strujom $I_1$ i povezan sa $W_2$,

$d\Phi_{2-1}$ i $\Delta\Phi_{2-1}$ — magnetski fluks stvaran strujom $I_2$ i povezan sa $W_1$.

Međuinduktivitet ima istu jedinicu kao i induktivitet, tj. 1 henri [H].

Međusobni induktivitet dve magnetski povezane konture na zajedničkom jezgru (sl. 6.5.3b) iznosi:

$$M = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \mu_r \frac{W_1 \cdot W_2 \cdot S_M}{l_M} \text{[H]} \quad (6.5.9)$$

gde su:

$W_1$ i $W_2$ — broj navojaka namotaja prve i druge konture,

$S_M$ [m²] — površina poprečnog preseka magnetskog kola,

$l_M$ [m] — srednja dužina magnetskih linija,

$\mu_r$ — relativna magnetska propustljivost feromagnetskog materijala.

Ems međusobne indukcije (u drugoj konturi) iznosi:

$$e_{M2} = -W_2 \frac{d\Phi_{1-2}}{dt}$$

$$e_{M2} = -W_2 \frac{\Delta\Phi_{1-2}}{\Delta t} \quad (6.5.10)$$

Energija, skoncentrisana u magnetskom polju, koja se pretvara u druge oblike energije pri promeni magnetskog polja, iznosi:

$$W_M = \frac{L \cdot I^2}{2} \text{[J]} \quad (6.5.11)$$

gde su:

$L$ [H] — induktivitet kola,

$I$ [A] — struja,

$W_M$ [J] — energija.

### 6.5.2. Primeri

**1. primer:** Magnetski fluks probada $W = 500$ navoja namotaja i raste u vremenu $\Delta t = 0,2$ s od $\Phi_1 = 0$ do $\Phi_2 = 0,012$ Wb. Izračunati ems samoindukcije stvarane u namotaju i induktivitet namotaja ako se struja za to vreme povećala od $I = 0$ do $I = 0,5$ A.

Rešenje: Ems samoindukcije iznosi:

$$e_L = -W\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -500\frac{0,012}{0,2} = -30\text{ V}$$

a induktivitet namotaja iznosi:

$$L = -e_L\frac{\Delta t}{\Delta I} = -(-30)\frac{0,2}{0,5} = 12\text{ H}$$

**2. primer:** Odrediti ems $e_M$ i međuinduktivitet $M$ u drugoj konturi, koja se sastoji od $W_2 = 100$ navoja, ako je probada magnetski fluks stvoren u prvoj konturi strujom koja se povećala od $I_1 = 0$ do $I_2 = 50$ mA u sekundi. Magnetski fluks menja se brzinom od $\Phi_1 = 0$ do $\Phi_2 = 0,02$ Wb u sekundi.

Rešenje: Ems u drugoj konturi iznosi:

$$e_{M2} = -W_2\frac{\Delta\Phi_{1-2}}{\Delta t} = -100\frac{0,02}{1} = -2\text{ V}$$

Međusobni induktivitet je:

$$M = -e_{M2}\frac{\Delta t}{\Delta I} = -(-2)\frac{1}{0,05} = 40\text{ H}$$

**3. primer:** Navoj (ram) s aktivnom dužinom $l_1 = l_2 = 0,25$ m obrće se brzinom $v = 4$ m/s u homogenom magnetskom polju indukcije $B = 1,4$ T (sl. 6.5.1b). Odrediti ems indukovanu u navoju u trenutku kada je $\alpha = 30°$.

Rešenje: Vrednost ems je:

$$e = B\cdot l\cdot v\cdot\sin\alpha = 1,4\cdot 2\cdot 0,25\cdot 4\cdot\sin 30° = 1,4\text{ V}$$

**4. primer:** Izračunati induktivitet namotaja koji ima $W = 6000$ navoja, dužine $l = 150$ mm i prečnik $D_{sr} = 40$ mm ($\mu_r = 1$).

Rešenje: Presek namotaja je:

$$S = \frac{D_{sr}^2 \cdot \pi}{4} = \frac{4^2 \cdot \pi}{4} = 12{,}56\ \text{cm}^2 = 12{,}56 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2$$

Induktivitet iznosi:

$$L = 4\pi\, 10^{-7}\, \mu_r \frac{W^2 \cdot S_M}{l_M} = 4\pi\, 10^{-7} \frac{6\,000^2 \cdot 12{,}56 \cdot 10^{-4}}{0{,}15} =$$

$$= 0{,}380\ \text{H}$$

### 6.5.3. Zadaci za samostalno rešavanje

1. Magnetski fluks probada namotaj koji se sastoji od $W = 100$ navoja i menja se brzinom $\Phi = 0{,}012$ Wb za vreme $\Delta t = 0{,}1$ s. Kolika je ems samoindukcije ($e$) stvorena u namotaju?

2. U namotaju koji ima $W = 100$ navoja magnetsko polje raste brzinom $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 0{,}0001\ \frac{\text{Wb}}{\text{s}}$. Kolika je ems samoindukcije $e_L$ stvorena u namotaju?

3. Odrediti brzinu promene $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ magnetskog polja namotaja, koji se sastoji od $W = 500$ navoja, ako se u njemu indukuje ems samoindukcije $e_L = 1$ V.

4. Induktivitet namotaja pobude generatora jednosmerne struje je $L = 200$ mH. Kolika je ems samoindukcije, stvarana u namotaju pri povećanju struje od $I_1 = 0$ do $I_2 = 1$ A za vreme $\Delta t = 0{,}1$ s?

5. Pri kojem se broju navoja $W$ i induktivitetu $L$ u namotaju indukuje ems $e_L = 10$ V, ako za vreme $\Delta t = 0{,}01$ s magnetski fluks u njemu raste od $\Phi_1 = 0{,}001$ Wb do $\Phi_2 = 0{,}0015$ Wb, a struja od $I_1 = 200$ mA do $I_2 = 300$ mA?

6. U generatoru jednosmerne struje postoji magnetski fluks $\Phi = 0{,}001$ Wb. Površina svakog elektromagneta koji stvara fluks iznosi $S = 10\ \text{cm}^2$. Kolika je ems $e$ indukovana u jednom provodniku rotora dužine $l = 500$ mm u trenutku kada se rotor zakrene za 30° od neutralne ose? Rotor se okreće brzinom $v = 15$ m/s.

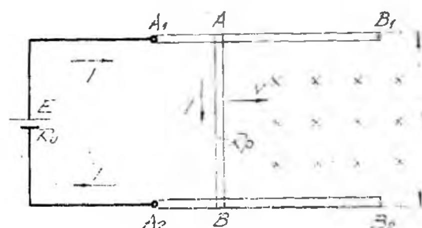
7. Odrediti brzinu premeštanja provodnika dužine $l = 0{,}15$ m u polju s indukcijom $B = 1{,}5$ T, ako se u provodniku indukuje ems $e = 0{,}45$ V. Provodnik se premešta normalno na magnetske silnice.

8. U generatoru jednosmerne struje magnetski fluks od $\Phi = 0{,}036$ Wb stvara se elektromagnetima, čiji svaki pol ima dimenzije $10 \times 12$ cm. Odrediti ems indukovanu u svakom provodniku rotora, aktivne dužine $l = 20$ cm, ako se on obrće brzinom $v = 2$ m/s u trenutku kada se rotor okrene za ugao $\alpha = 60°$.

9. Odrediti u Wb i Mx vrednost magnetskog fluksa $\Phi$, stvaranog u generatoru jednosmerne struje čiji svaki pol ima površinu $S_M = 95\ \text{cm}^2$. U svakom provodniku rotora, čija je aktivna dužina $l = 150$ mm i koji se okreće brzinom $v = 15$ m/s, pri zakretanju rotora od neutralne ose za ugao $\alpha = 45°$ indukuje se ems $e = 1{,}35$ V.

10. Pravolinijski provodnik dužine $l = 0{,}5$ m kreće se brzinom $v = 12$ m/s u homogenom magnetskom polju indukcije $B = 0{,}8$ T. Ugao između vektora $B$ i $V$ iznosi 45°, a između provodnika i magnetskih linija 90°. Odrediti vrednost indukovanog napona.

11. U homogenom magnetskom polju magnetske indukcije $B = 1{,}2$ T po dvema metalnim šipkama $A_1 B_1$ i $A_2 B_2$ (sl. 6.5.4) premešta se provodnik $AB$ brzinom $v = 8$ m/s. Izračunati struju u provodniku, ako je ems izvora $E = 6$ V, njegov unutrašnji otpor $R_u = 0{,}01\ \Omega$, otpor provodnika $R_p = 0{,}05\ \Omega$ i dužina $l = 0{,}5$ m. Otpor spojnih vodova i šipki zanemariti.



Sl. 6.5.4

12. U namotaju koji ima $W = 200$ navoja magnetski fluks $\Phi_1 = 0{,}018$ Wb smanjuje se do $\Phi_2 = 0$ za vreme $\Delta t = 0{,}18$ s. Odrediti ems samoindukcije $e_L$, induktivitet namotaja $L$ i energiju magnetskog polja $W_M$ ako kroz namotaj teče struja $I = 1$ A.

13. Odrediti induktivitet namotaja od bakarne žice koji ima $W = 900$ navoja namotanih na kartonsko jezgro prečnika $D = 40$ mm, dužine $l = 200$ mm i ems $e$ indukovanu u njemu pri porastu struje od $I_1 = 0$ do $I_2 = 5$ A za vreme $\Delta t = 0{,}25$ s.

14. Namotaj induktiviteta $L=250$ mH treba da bude namotan na kartonsko jezgro prečnika $D=4$ cm i dužine $l=20$ cm. Odrediti broj navoja namotaja $W$ i induktivnost $L$ ako se on postavi na jezgro sa relativnom magnetskom propustljivošću $\mu_r=2000$.

15. Radio-transformator sastoji se od jezgra u obliku Ш i namotaja s brojem navoja $W_1=1\,900$ i $W_2=38$. Izračunati induktivitet $L_1$ prvog i $L_2$ drugog namotaja, ako je površina preseka jezgra $S_N=5{,}8\ cm^2$, srednja dužina magnetskih silnica $l_N=19{,}6$ mm i $\mu_r=1\,700$.

16. Izračunati induktivitet namotaja $L$, ako se u njemu indukuje ems samoindukcije $e_L=220$ V pri promeni struje od $\Delta I=15$ mA za $\Delta t=10^{-5}$ s.

17. Odrediti međuinduktivitet dva namotaja raspoređenih na čelično jezgro ($\mu_r=150$), ako je prečnik jezgra $D=40$ mm, srednja dužina $l=200$ mm, a broj navoja namotaja $W_1=100$, $W_2=200$.

18. Odrediti ems $e_{M}$ stvaranu u jednom od dva magnetski vezana kola pri ravnomernom smanjivanju struje u drugom od $\Delta I=50$ mA do nule za $\Delta t=1$ s, ako je međuinduktivitet $M=20$ mH.

19. Odrediti međuinduktivitet $M$ dva magnetski vezana kola, kada se u jednom indukuje ems $e_{m1}=2$ V pri ravnomernoj promeni struje, a u drugom brzinom od $\frac{\Delta I}{\Delta t}=0{,}5$ A/s.

20. Pri isključenju prve konture struja se u njoj smanjuje za vreme $\Delta t=0{,}02$ sekunde od $I_1=50$ mA do $I_2=0$. Odrediti ems međuindukcije $e_{M2}$ u drugoj konturi, koja ima $W=200$ navoja i međuinduktivitet $M$, ako je poznato da se fluks za to vreme smanji od $\Phi_1=0{,}0003$ Wb do $\Phi_2=0$.

21. Dva namotaja s brojem navoja $W_1=100$ i $W_2=200$ postavljena su na jezgro čija je relativna magnetska propustljivost $\mu_r=150$, prečnik $D=40$ mm i dužina $l=200$ mm. Odrediti međuinduktivitet $M$.

22. Površina poprečnog preseka feromagnetskog jezgra prstenastog namotaja je $S=2\times 2\ cm^2$, a srednja dužina magnetskih linija $l_{sr}=20$ cm. Namotaj sadrži 400 navoja s induktivitetom $L=0{,}4$ H. U kojim granicama možemo menjati struju u namotaju, a da magnetska indukcija u jezgru ne bi izašla iz predela »kolena« krive magnetiziranja ($B=1$ do $1{,}3$ T)?

23. Kako bi se promenio induktivitet namotaja iz 22. zadatka, ako je jezgro napravljeno od neferomagnetskog materijala?

24. Dva namotaja s brojem navoja $W_1 = 500$ i $W_2 = 1\,000$ namotani su na prsten od nemagnetskog materijala. Odnos spoljnog i unutrašnjeg prečnika prstena je $D_2 : D_1 = 5 : 3$; presek prstena je kvadratan sa stranom $a = 5$ cm. Naći međuinduktivitet namotaja.

25. Dva namotaja prstenastog jezgra s brojem navoja $W_1$ i $W_2$, vezani su međusobno magnetskim fluksom. Induktivnost prvog namotaja je 0,2 H. Izračunati međuinduktivitet namotaja ako je $W_2 = 3\,W_1$.

# 7. NERAZGRANATA KOLA NAIZMENIČNE STRUJE

## 7.1. OSNOVNI POJMOVI O NAIZMENIČNOJ STRUJI

### 7.1.1. Osnovni pojmovi i formule

1. Naizmenična struja je periodična funkcija vremena čiji se veličina i smer ponavljaju u tačno određenim intervalima.

2. Trenutna vrednost električne struje naziva se vrednost električne struje u posmatranom trenutku.

3. Period ($T$) električne struje je najmanji deo vremena po isteku kojeg se trenutna vrednost struje ponavlja.

4. Frekvencija naizmenične struje naziva se veličina recipročna periodu:

$$f = \frac{1}{T} \text{ [Hz]} \tag{7.1.1}$$

gde je $[\text{Hz}] = \left[\frac{1}{\text{s}}\right] = [\text{s}^{-1}]$

Frekvenciju struje možemo izraziti i preko broja pari polova ($p$) generatora naizmenične struje i brzine obrtanja ($n$) u o/min:

$$f = \frac{n \cdot p}{60} \text{ [Hz]} \tag{7.1.2}$$

5. Ugaona frekvencija $\omega$ sinusoidalne električne struje je frekvencija struje pomnožena sa $2\pi$, a meri se u radijanima u sekundi:

$$\omega = 2\pi f \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right] \tag{7.1.3}$$

6. Ugaona brzina obrtanja rotora iznosi:

$$\omega_r = \frac{\omega}{p}\left[\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right] \qquad (7.1.4)$$

7. Ems elektromagnetske indukcije u pravolinijskom provodniku iznosi:

$$e = B \cdot l \cdot v \cdot \sin\alpha \,[\text{V}] \qquad (7.1.5)$$

gde su:

$e$ [V] — trenutna vrednost ems,

$B$ [T] — maksimalna vrednost magnetske indukcije,

$l$ [m] — aktivna dužina provodnika,

$v$ [m/s] — brzina obrtanja provodnika i

$\alpha$ — ugao u stepenima između pravca magnetskih linija i pravca provodnika (sl. 7.1.1).

8. Maksimalna vrednost ili amplituda sinusoidalne ems je:

$$E_m = B \cdot l \cdot v \,[\text{V}] \qquad (7.1.6)$$

9. Ugao $\alpha$, izražen preko ugaone frekvencije i vremena $t$, iznosi:

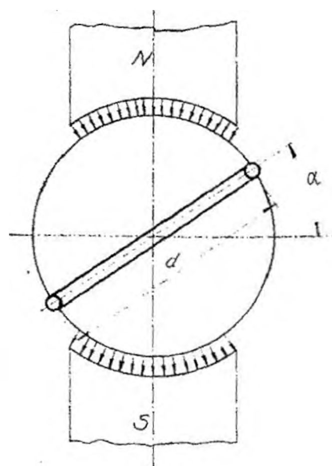
$$\alpha = \omega \cdot t \qquad (7.1.7)$$

gde je:

$t$ [s] — vreme proteklo od početnog trenutka.

10. Efektivna vrednost struje je:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{1,41} = 0,707\, I_m \,[\text{A}] \qquad (7.1.8)$$




Sl. 7.1.1

Efektivna vrednost napona iznosi:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_m}{1,41} = 0,707\, U_m \,[\text{V}] \qquad (7.1.9)$$

Efektivna vrednost ems je:

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = \frac{E_m}{1,41} = 0,707\, E_m \,[\text{V}] \qquad (7.1.10)$$

11. Srednja vrednost struje iznosi:

$$I_{sr} = 0{,}637\, I_m\ [\mathrm{A}] \tag{7.1.11}$$

12. Električne sinusoidalne veličine, koje su u fazi, date su izrazima:

$$u = U_m \cdot \sin(\omega t + \psi)\ [\mathrm{V}] \tag{7.1.12}$$

$$i = I_m \cdot \sin(\omega t + \psi)\ [\mathrm{A}]$$

13. Električne veličine fazno pomaknute date su izrazima:

$$u = U_m \cdot \sin(\omega t + \psi_1)\ [\mathrm{V}] \tag{7.1.13}$$

$$i = I_m \cdot \sin(\omega t + \psi_2)\ [\mathrm{A}]$$

gde su:

$\omega t + \psi_1 = \alpha_1$ — faza napona ili fazni ugao napona,

$\omega t + \psi_2 = \alpha_2$ — faza struje ili fazni ugao struje,

$\psi_1$ i $\psi_2$ — početna faza ili vrednost faze u početnom trenutku (kada je $t = 0$),

$\psi_1 - \psi_2 = \psi$ — razlika faza ili pomak faza.



Sl. 7.1.2

14. Rezultantna ems $E_m$ (sl. 7.1.2) dobijena kao suma dve sinusoidalne ems $e_1 = E_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$ i $e_2 = E_{2m} \cdot \sin(\omega t + \psi_2)$ iznosi:

$$E_m = \sqrt{E_{1m}^2 + E_{2m}^2 + 2\, E_{1m} \cdot E_{2m} \cdot \cos(\psi_2 - \psi_1)}\ [\mathrm{V}] \tag{7.1.14}$$

15. Tangens početne faze rezultante ems je:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{E_m \sin \psi}{E_m \cos \psi} = \frac{E_{1m} \cdot \sin \psi_1 + E_{2m} \cdot \sin \psi_2}{E_{1m} \cdot \cos \psi_1 + E_{2m} \cdot \cos \psi_2} \tag{7.1.15}$$

### 7.1.2. **Primeri**

**1. primer:** U homogenom magnetskom polju, čija je magnetska indukcija $B = 0{,}96$ T, namotaji generatora obrću se brzinom $n = 1000$ o/min. Aktivna dužina namotaja ima dužinu $l = ab = cd =$

$= 0,5$ m (sl. 6.5.1b), a prečnik rotora je $d = 0,4$ m. Treba odrediti kako se menja ems indukovana u aktivnim stranama namotaja u toku jednog obrta, ako poslednji počinje svoje kretanje od ugla $\alpha = 0°$. Nacrtati promenu ems.

Rešenje: Linearna brzina provodnika iznosi:

$$v = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{60} = \frac{3,14 \cdot 0,4 \cdot 1000}{60} = 20,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Maksimalna ems u aktivnim stranama namotaja je:

$$E_m = B \cdot l \cdot v = 0,96 \cdot 0,5 \cdot 20,9 = 10 \text{ V}$$

Trenutna vrednost ems je:

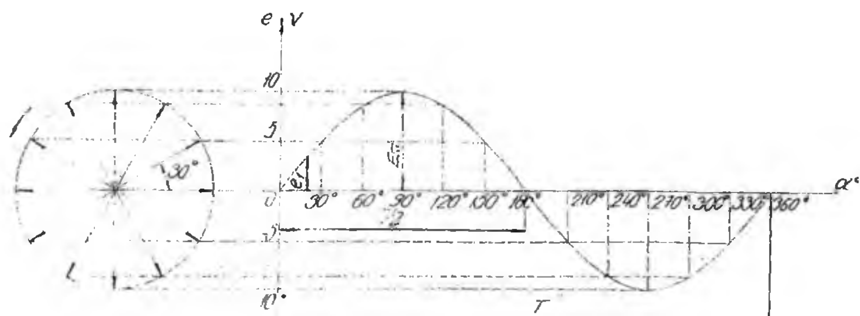
$$e = E_m \cdot \sin\alpha = 10 \cdot \sin\alpha \text{ [V]}.$$

Za lakše rešavanje zadataka sastavimo tabelu promene $\sin\alpha$ i trenutne vrednosti ems u zavisnosti od ugla $\alpha$ za svakih 15°.

**Tabela 7**

| Ugao $\alpha$ [°] | $\sin\alpha$ | $e = 10 \sin\alpha$ [V] | Ugao $\alpha$ [°] | $\sin\alpha$ | $e = 10 \sin\alpha$ [V] |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,0 | 0 | 195 | —0,259 | —2,59 |
| 15 | 0,259 | 2,59 | 210 | —0,5 | —5 |
| 30 | 0,5 | 5 | 225 | —0,707 | —7,07 |
| 45 | 0,707 | 7,07 | 240 | —0,866 | —8,66 |
| 60 | 0,866 | 8,66 | 255 | —0,966 | —9,66 |
| 75 | 0,966 | 9,66 | 270 | —1,0 | —10 |
| 90 | 1,0 | 10 | 285 | —0,966 | —9,66 |
| 105 | 0,966 | 9,66 | 300 | —0,866 | —8,66 |
| 120 | 0,866 | 8,66 | 315 | —0,707 | —7,07 |
| 135 | 0,707 | 7,07 | 330 | —0,5 | —5 |
| 150 | 0,5 | 5 | 345 | —0,259 | —2,59 |
| 175 | 0,259 | 2,59 | 360 | 0,0 | 0,0 |
| 180 | 0,0 | 0 | | | |

Na osnovu date tabele nacrtamo promenu sinusoidalne ems u zavisnosti od ugla $\alpha$ (sl. 7.1.3).




**Sl. 7.1.3**

**2. primer:** Naći trenutnu vrednost ems za $t = 0{,}00167$ sekundi, ako je amplituda ems $E_m = 180$ V, a frekvencija struje $f = 50$ Hz.

R e š e n j e: Trenutna vrednost ems iznosi:

$$e = E_m \sin \alpha = E_m \cdot \sin \omega t = E_m \cdot \sin 2\pi f \cdot t$$

$$\alpha = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t = 2 \cdot 180 \cdot 50 \cdot 0{,}00167 = 30^\circ$$

$$e = 180 \cdot \sin 30^\circ = 90 \text{ V}$$

**3. primer:** Naći efektivne vrednosti frekvencije i periode struja $i_1 = 10 \sin 314\, t$ i $i_2 = 10 \sin 628\, t$.

R e š e n j e: Frekvencije struja iznose:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{314}{2 \cdot 3{,}14} = 50 \text{ Hz}$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{628}{2 \cdot 3{,}14} = 100 \text{ Hz}$$

Odgovarajući periodi struja su:

$$T_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{1}{50} = 0{,}02\ \mathrm{s}$$

$$T_2 = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{100} = 0{,}01\ \mathrm{s}$$

Efektivne vrednosti struja iznose:

$$I_1 = I_2 = \frac{10}{1{,}41} = 7{,}07\ \mathrm{A}$$

**4. primer:** Trenutna vrednost napona na dva redno uključena otpora data je izrazima: $u = 57 \sin 314\, t$ i $u_2 = 113 \sin 314\, t$. Napisati jednačinu trenutne vrednosti rezultantnog napona $u$, nacrtati grafikon napona $u_1$, $u_2$ i $u$, naći efektivnu vrednost napona $U_1$, $U_2$ i $U$.

Rešenje: Pošto sinusoidalni naponi $u_1$ i $u_2$ imaju iste faze $\alpha_1 = \alpha_2 = 314\, t$, to je maksimalna vrednost rezultantnog napona jednaka sumi maksimalnih vrednosti napona $U_{1m}$ i $U_{2m}$:

$$U_m = U_{1m} + U_{2m} = 57 + 113 = 170\ \mathrm{V}$$

Trenutna vrednost rezultantnog napona je:

$$u = U_m \sin 314\, t = 170 \sin 314\, t$$

Efektivne vrednosti napona su:

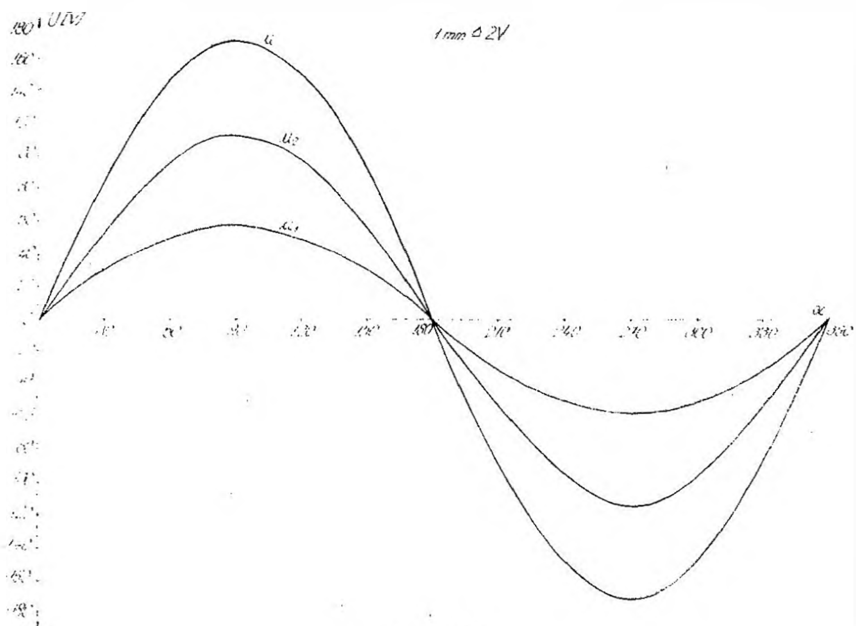
$$U_1 = \frac{U_{1m}}{\sqrt{2}} = \frac{57}{1{,}41} = 40\ \mathrm{V}$$

$$U_2 = \frac{U_{2m}}{\sqrt{2}} = \frac{113}{1{,}41} = 80\ \mathrm{V}$$

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{170}{1{,}41} = 120\ \mathrm{V}$$

$$U = U_1 + U_2 = 40 + 80 = 120\ \mathrm{V}$$

Za crtanje grafikona napona (sl. 7.1.4) sastavljamo tabelu




**Sl. 7.1.4**

**Tabela 8**

| $\alpha = \omega t$ | $\sin \alpha$ | $u_1 = 57 \sin \omega t$ | $u_2 = 113 \sin \omega t$ | $u = u_1 + u_2$ ili $u = 170 \sin \omega t$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 30 | 0,5 | 28,5 | 56,5 | 85 |
| 60 | 0,866 | 49,36 | 97,86 | 147,22 |
| 90 | 1 | 57 | 113 | 170 |
| 120 | 0,866 | 49,36 | 97,86 | 147,22 |
| 150 | 0,5 | 28,5 | 56,5 | 85 |
| 180 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 210 | —0.5 | —28,5 | —56,5 | —85 |
| 240 | —0,866 | —49,36 | —97,86 | —147,22 |
| 270 | —1 | —57 | —113 | —170 |
| 300 | —0,866 | —4936 | —97,86 | —147,22 |
| 330 | —0,5 | —28,5 | —56,5 | —85 |
| 360 | 0 | 0 | 0 | 0 |

**5. primer:** Nacrtati u razmeri vektorski dijagram struja zadatih jednačinama:

$$i_1 = 6 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ i } i_2 = 8 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

Odrediti početne faze $\varphi_1$ i $\varphi_2$, razlika faza $\varphi$, maksimalna vrednost $I_m$ i početnu fazu $\varphi$ rezultantne struje, ako je frekvencija $f = 50$ Hz.

Rešenje: Fazni uglovi ili faze iznose:

$$\alpha_1 = \omega t + \frac{\pi}{6}$$

$$\alpha_2 = \omega t - \frac{\pi}{3}$$

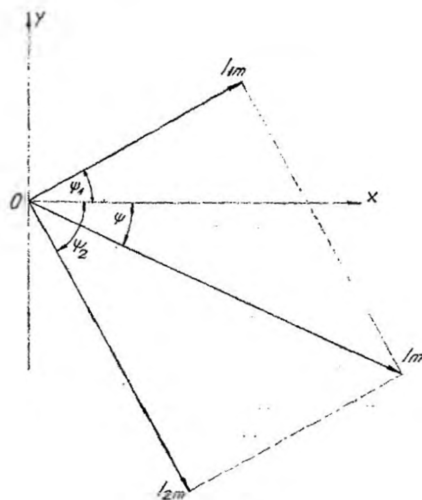
Početni fazni uglovi, ili početne faze su:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{6} \text{ ili } \varphi_1 = \frac{180}{6} = 30^\circ$$

$$\varphi_2 = -\frac{\pi}{3} \text{ ili } \varphi_2 = -\frac{180}{3} = -60^\circ$$

Razlika je:

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{2 \cdot \pi}{6} = \frac{\pi}{2} \text{ ili } = \frac{180}{2} = 90^\circ$$




Sl. 7.1.5

Maksimalna vrednost rezultantne struje (sl. 7.1.5) iznosi:

$$I_m = \sqrt{I_{1m}^2 + I_{2m}^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ A}$$

Tangens početne faze rezultantne struje je:

$$tg\psi = \frac{I_{1m} \sin \varphi_1 - I_{2m} \sin \varphi_2}{I_{1m} \cos \varphi_1 + I_{2m} \cos I_2} = \frac{6 \sin 30° - 8 \sin 60°}{6 \cos 30° + 8 \cos 60°} = -0{,}428$$

Iz trigonometrijskih tablica nalazimo da je:

$$\varphi = 23° \text{ ili u radijanima } \varphi = \frac{23 \cdot 2}{360} = 0{,}128\,\pi$$

**6. primer:** Trenutna vrednost napona na dva redno uključena otpora zadata je jednačinama:

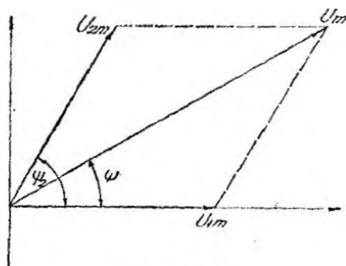
$$u_1 = 310 \sin \omega t \quad i \quad U_2 = 308 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Odrediti maksimalni napon $U_m$ efektivnu vrednost $U$ i početnu fazu rezultantnog napona. Nacrtati vektorski dijagram.

Rešenje: Maksimalna vrednost rezultantnog napona (sl. 7.1.6) je:

$$U_m = \sqrt{U_{1m}{}^2 + U_{2m}{}^2 + 2 \cdot U_{1m} \cdot U_{2m} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} =$$

$$= \sqrt{310^2 + 308^2 + 2 \cdot 310 \cdot 308 \cdot \cos 60°} = 535\,\text{V}$$




Sl. 7.1.6

Efektivna vrednost rezultantnog napona je:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{535}{1{,}41} = 380\,\text{V}$$

Tangens početne faze rezultirajućeg napona iznosi:

$$tg\,\varphi = \frac{U_{1m} \sin \varphi_1 + U_{2m} \sin \varphi_2}{U_{1m} \cos \varphi_1 + U_{2m} \cos \varphi_2} = \frac{310 \cdot 0 + 308 \cdot 0{,}866}{310 \cdot 1 + 308 \cdot 0{,}5} = 0{,}573$$

Iz trigonometrijskih tablica nalazimo da ovom $tg\,\varphi$ odgovara ugao $\varphi = 30°$.

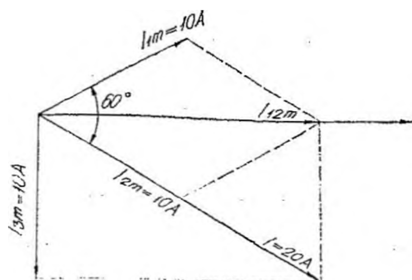
**7. primer:** Naći maksimalnu struju $I_m$ i efektivnu $I$ rezultantne vrednosti sledeće tri struje:

$$i_1 = 10 \sin(\omega t + 30^\circ)$$

$$i_2 = 10 \sin(\omega t - 30^\circ)$$

$$i_3 = 10 \sin(\omega t - 90^\circ)$$

Rešenje: Na početku nacrtajmo u razmeri vektorski dijagram (sl. 7.1.7) maksimalne vrednosti rezultantne struje.




Sl. 7.1.7

Rezultanta maksimalne vrednosti struje $I_{1m}$ i $I_{2m}$ je:

$$I_{12m} = \sqrt{I_{1m}^2 + I_{2m}^2 + 2 \cdot I_{1m} \cdot I_{2m} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} =$$

$$= \sqrt{10^2 + 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 0{,}5} = \sqrt{300} = 17{,}3 \text{ A}$$

Struje $I_{12m}$ i $I_{3m}$ jedna u odnosu na drugu pomerene su za ugao $90^\circ$ tako da je rezultantna struja:

$$I_m = \sqrt{I_{12m}^2 + I_{3m}^2} = \sqrt{300 + 100} = 20 \text{ A}$$

Efektivna vrednost rezultantne struje je:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{20}{1{,}41} = 14{,}1 \text{ A}$$

### 7.1.3. Zadaci za samostalno rešenje

1. Ram pravougaonog oblika (sl. 6.5.1b) obrće se u homogenom magnetskom polju magnetske indukcije $B = 1{,}5$ T. Brzina obrtanja rama je $n = 1\,500$ o/min. Aktivna dužina provodnika rama je 300 mm, a prečnik rotora je $d = 200$ mm.

Odrediti kako se menja ems e, indukovana u jednoj strani rama, u toku jednog obrta, ako on počinje svoje kretanje od ugla $\alpha = 0^\circ$ menjajući svaki put veličinu ugla $\alpha$ za $30^\circ$.

2. Rotor turbogeneratora obrće se brzinom $n = 3\,000$ o/min. Frekvencija struje je $f = 50$ Hz. Odrediti period $T$, broj pari polova $p$ generatora, ugaonu frekvenciju $\omega$ i ugaonu brzinu obrtanja rotora $\omega_r$.

3. Odrediti frekvenciju $f$ i ugaonu frekvenciju $\omega$ za sledeće vrednosti perioda:

$$T_1 = 4 \cdot 10^{-2}\,\text{s},\ T_2 = 2 \cdot 10^{-2}\,\text{s},\ T_3 = 10^{-4}\,\text{s i } T^5 = 10^{-1}\,\text{s}.$$

4. Za koji se ugao pomeri namotaj za vreme $t = 0{,}01$ s, ako se on obrće konstantnom brzinom $\omega = 314\ \frac{1}{s}$?

5. Naći trenutnu vrednost struje $i = I_m \sin \omega t$ nakon 0,01 s od početka periode, ako je amplitude struje $I_m = 10$ A, a frekvencija struje $f = 50$ Hz.

6. Naći trenutnu vrednost ems za sledeće trenutke vremena:

$$t_1 = 0,\ t_2 = 0{,}0025,\ t_3 = 0{,}005,\ t_4 = 0{,}0075,\ t_5 = 0{,}01,$$

$t_6 = 0{,}0125$, $t_7 = 0{,}015$, $t_8 = 0{,}0175$, $t = 0{,}02$ sekunde pri $E_m = 310$ V i frekvenciji struje $f = 50$ Hz. Nacrtati grafikon $e = E_m \sin \omega t$.

7. Turbogenerator naizmenične struje obrće se brzinom $n = 3\,000$ o/min i ima jedan par polova. Odrediti frekvenciju struje $f$, period $T$, ugaonu frekvenciju $\omega$ i ugaonu brzinu obrtaja rotora $\omega_r$ generatora.

8. Hidrogenerator ima broj pari polova $p = 40$ i proizvodi naizmeničnu struju frekvencije $f = 50$ Hz. Odrediti brzinu obrtanja rotora generatora $n$, ugaonu frekvenciju naizmenične struje $\omega$ i ugaonu brzinu obrtanja rotora $\omega_r$.

9. U elektrotermiji primenje se struja frekvencija od $f_1 = 50$ Hz do $f_2 = 10_8$ Hz. Odrediti periode $T_1$ i $T_2$, koji odgovaraju frekvencijama $f_1$ i $f_2$.

10. Dijapazon (oblast) frekvencije primenjivane u radio -tehnici menja se u granicama od $f_1 = 10^5$ Hz do $f_2 = 3 \cdot 10^{10}$ Hz. Odrediti odgovarajuće periode $T_1$ i $T_2$.

11. U avijaciji se primenje struja frekvencije $f = 400$ Hz. Odrediti za generator sa dva para polova brzinu obrtanja rotora $n$, period $T$, ugaonu frekvenciju $\omega$ naizmenične struje i ugaonu brzinu obrtanja rotora. $\omega_r$.

12. Trenutne vrednosti napona zadate su jednačinama:

$u_1 = 179 \sin 1256\, t$ i $u_2 = 310 \sin 2512\, t$.

Naći efektivne vrednosti napona $U_1$ i $U_2$, frekvenciju $f_1$ i $f_2$ i periode $T_1$ i $T_2$.

13. Date su tri sinusoidalne struje:

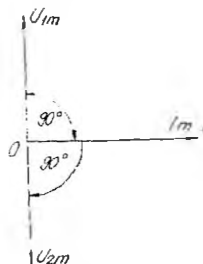
$i_1 = 10 \sin \omega t$, $i_2 = 10 \sin (\omega t - 120°)$ i $i_3 = 10 \sin (\omega t - 240°)$.

Nacrtati vektorski dijagram i odrediti maksimalnu vrednost rezultantne struje.

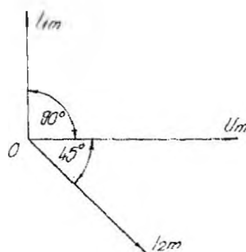
14. Maksimalna vrednost napona $U_m = 180$ V, a maksimalna vrednost struje $I_m = 10$ A. Struja zaostaje za naponom za ugao $\varphi = 45°$. Napisati matematički izraz za trenutne vrednosti struje i napona, ako je početna faza napona jednaka nuli.

15. Odrediti maksimalnu vrednost napona $U_m$, ako je poznato da je $u = U_m \sin\left(\omega t + \frac{1}{6}\pi\right)$ u trenutku vremena $t = 0$. Trenutna vrednost napona je $u = 155$ V.

16. Na sl. 7.1.8 za trenutak $t = 0$ dati su vektori struje i napona, čije su amplitude $U_{1m} = 220$ V, $U_{2m} = 315$ V i $I_m = 20$ A. Napisati analitički izraz trenutnih vrednosti struje i napona.




**Sl. 7.1.8**




**Sl. 7.1.9**

17. Napisati analitički izraz za trenutne vrednosti struja i napona (sl. 7.1.9), ako je $U_m = 310$ V, $I_{1m} = 30$ A i $I_{2m} = 42$ A.

18. Kroz provodnik protiče jednosmerna struja $I = 5$ A. Kolika je amplituda struje $I_m$, ako kroz provodnik protiče naizmenična struja koja će za isto vreme u provodniku stvarati istu količinu toplote, kao jednosmerna?

19. Srednja vrednost sinusoidalne struje za polovinu perioda iznosi $I_{sr} = 100$ mA. Izračunati maksimalnu $I_m$ i efektivnu $I$ vrednost struje.

20. Amplituda sinusoidalnog napona je $U_m = 1410$ V. Odrediti efektivnu vrednost i srednju vrednost napona ($U$ i $U_{sr}$).

21. Prema zadatim vrednostima u tabeli 9 odrediti maksimalnu $U_m$, efektivnu vrednost $U$ i početnu fazu $\varphi$ rezultantnog naponu, ako je $u_1 = U_{1m} \sin(\omega t + \varphi_1)$ i $u_2 = U_{2m} \sin(\omega t + \varphi_2) = $ $= 314 \frac{1}{s}$.

**Tabela 9**

| Veličine | Varijante | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $U_1$ [V] | 60 | 128 | 220 | 40 |
| $U_2$ [V] | 65 | 128 | 110 | 33 |
| $\varphi_{12}$ [°] | 30 | 45 | 75 | 90 |

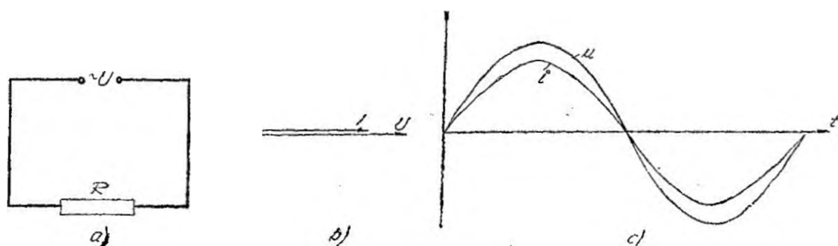
## 7.2. KOLA NAIZMENIČNE STRUJE S AKTIVNIM OTPOROM

### 7.2.1. Osnovni pojmovi i formule

1. Trenutne vrednosti napona i struje u kolu s aktivnim otporom (sl. 7.2.1) date su izrazima:

$$u = U_m \sin \omega t \qquad (7.2.1)$$

$$i = I_m \sin \omega t \qquad (7.2.2)$$




Sl. 7.2.1

2. Razlika faza između struja i napona je:

$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$

3. Omov zakon za kolo s aktivnim otporom glasi:

$$I = \frac{U}{R}$$

gde su:

$I$ [A] — efektivna vrednost struje,
$U$[V] — efektivna vrednost napona,
$R$[Ω] — aktivni otpor.

4. Napon (pad napona) na aktivnom otporu iznosi:

$$U_a = I \cdot R \, [V] \qquad (7.2.4)$$

5. Srednja vrednost trenutne snage za period iznosi:

$$P = U_a \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U_a^2}{R} \, [W] \qquad (7.2.5)$$

6. Energija potrebna aktivnom potrošaču je:

$$W_a = P \cdot t \, [Ws]. \qquad (7.2.6)$$

gde su:

$W_a$ [Ws] — energija,
$P$ [W] — aktivna snaga,
$t$ [s] — vreme.

### 7.2.2. **Primeri**

**1. primer:** Na električni rešo, aktivnog otpora $R = 40\,\Omega$, priveden je napon $u = 169{,}2 \sin 314\,t$. Odrediti struju $I$, napon $U$, snagu $P$, frekvenciju $f$, period $T$ i potrošnju energije $W_a$ za vreme $t = 5$ časova. Napisati izraz za trenutnu vrednost struje.

Rešenje: Efektivna vrednost napona je:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{169{,}2}{1{,}41} = 120 \text{ V}$$

Efektivna vrednost struje je:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{120}{40} = 3\ \text{A}$$

Snaga u kolu iznosi:

$$U = P \cdot I = 120 \cdot 3 = 360\ \text{W}$$

Frekvencija je:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{314}{2 \cdot 3,14} = 50\ \text{Hz}$$

Period iznosi:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0,02\ \text{s}$$

Energija potrošena u kolu za vreme $t$ je:

$$W_a = P \cdot t = 360 \cdot 5 = 1800\ \text{Wh} = 1,8\ \text{kWh}$$

Maksimalna vrednost struje iznosi:

$$I_m = I \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot 1,41 = 4,23\ \text{A}$$

Trenutna vrednost stuje je:

$$i = I_m \sin \omega t = 4,23 \cdot \sin 314\, t\ [\text{A}]$$

### 7.2.3. **Zadaci za samostalno rešavanje**

1. U mreži naizmenične struje napona $U = 220\ \text{V}$ uključena je električna sijalica aktivnog otpora $R = 484\ \Omega$. Odrediti efektivnu vrednost $I$, maksimalnu $I_m$ i srednju $I_{sr}$ vrednost struje i snagu $P$ sijalice.

2. Sobna električna peć, otpora $R = 20\ \Omega$, priključena je na mrežu napona $U = 120\ \text{V}$ i frekvencije $f = 50\ \text{Hz}$. Odrediti struju $I$, snagu $P$, energiju $W_a$, potrebnu u toku $t = 20$ minuta, i cenu potrošnje energije, ako 1 kWh košta 0,25 dinara. Napisati izraze za trenutne vrednosti struje i napona. Nacrtati vektorski dijagram struja i napona.

3. Na električnoj sijalici napisano je 75 W i 127 V. Odrediti efektivnu vrednost naizmenične struje $I$ i otpor $R$ niti sijalice.

4. Svitak s bifilarnim namotom otpora $R = 20\,\Omega$ uključen je u kolo naizmenične struje napona $U = 100$ V i ugaone frekvencije $\omega = 5024 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Izračunati pokazivanje ampermetra $I$, srednju vrednost struje $I_{sr}$, period struje $T$ i snagu $P$.

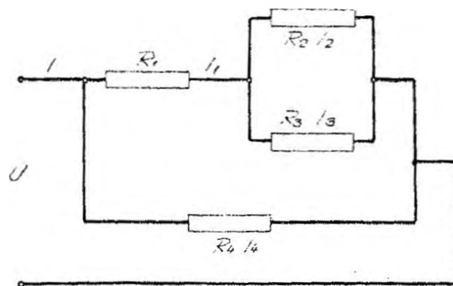
5. Izračunati aktivni otpor $R$ i snagu $P$, potrebnu aktivnom otporu, ako je pokazivanje ampermetra $I = 0{,}5$ A, a pokazivanje voltmetra $U = 120$ V.

6. U mreži naizmenične struje koja se napaja od dvopolnog turbogeneratora, čija je brzina $n = 3\,000$ o/min, uključeno je paralelno 10 električnih sijalica snage po $P = 60$ W. Napon mreže iznosi $U = 120$ V. Odrediti frekvenciju struje $f$, ugaonu frekvenciju $\omega$, vrednost struje $I$ u kolu i napisati izraze za trenutne vrednosti struje i napona, ako je početni fazni ugao napona $\psi = \frac{2\pi}{3}$.

7. Jednofazni asinhroni motor snage $P = 50$ W proračunat je za struju $I = 1{,}7$ A. Odrediti njegov aktivni otpor $R$.

8. Odrediti efektivnu vrednost napona $U$ na stezaljkama izvora struje i vrednost aktivnog otpora $R$ potrošača, ako se na otporu pri maksimalnoj vrednosti struje $I_m = 14{,}1$ A za vreme $t = 3$ h potroši energija $W_a = 6{,}6$ kWh.

9. U mreži naizmenične struje napona $U = 120$ V uključena je grupa potrošača (sl. 7.2.2) s aktivnim otporima $R_1 = 18\,\Omega$,




Sl. 7.2.2

$R_2 = 3{,}5\,\Omega$, $R_3 = 5{,}5\,\Omega$, $R_4 = 9\,\Omega$. Odrediti struje u delovima kola i potrebnu snagu kola.

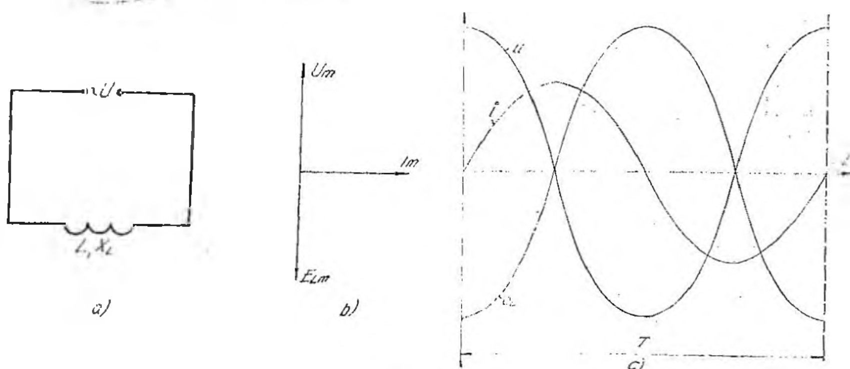
# 7.3. KOLA NAIZMENIČNE STRUJE S INDUKTIVITETOM

## 7.3.1. **Osnovni pojmovi i formule**

1. Trenutne vrednosti napona i struje (sl. 7.3.1) iznose:

$$u = U_m \sin \omega t \tag{7.3.1}$$

$$i = I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$



Sl. 7.3.1

2. Razlika faza između struje i napona je:

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

3. Induktivni otpor iznosi:

$$X_L = \omega L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L \,[\Omega] \tag{7.3.2}$$

gde je: $L$ [H] induktivitet.

4. Omov zakon za kolo s induktivitetom glasi:

$$I = \frac{U}{X_L} \,[\mathrm{A}]$$

5. Napon (pad napona) na induktivitetu je:

$$U_L = I \cdot X_L \text{ [V]} \quad (7.3.4)$$

6. Aktivna snaga iznosi:

$$P = 0 \quad (7.3.5)$$

7. Reaktivna snaga u kolu je:

$$Q = U_L \cdot I = I^2 \cdot X_L = \frac{U_L^2}{X_L} \text{ [VAr]} \quad (7.3.6)$$

8. Ems samoindukcije iznosi:

$$E_L = \omega L \cdot I = X_L \cdot I \text{ [V]} \quad (7.3.7)$$

ili

$$E_L = 4{,}44 \cdot f \cdot W \cdot \Phi_m \text{ [V]}$$

gde su:

$f$ [Hz] — frekvencija,

$W$ — broj navoja,

$\Phi_m$ [Wb] — maksimalna vrednost magnetskog fluksa.

### 7.3.2. Primeri

**1. primer:** Izračunati induktivne otpore svitka $X_{L1}$, $X_{L2}$ i $L_{L3}$ pri frekvencijama $f_1 = 50$ Hz, $f_2 = 400$ Hz i $f_3 = 10^5$ Hz, struje $I_1$, $I_2$ i $I_3$ i reaktivne snage $Q_1$, $Q_2$ i $Q_3$, ako je napon izvora na svitak $U = 120$ V. Aktivni otpor svitka je $R = 0$, a induktivitet $L = 25{,}5$ mH.

Rešenje: Induktivni otpori pri različitim frekvencijama iznose:

$$X_{L1} = \omega_1 \cdot L = 2\pi f_1 \cdot L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 25{,}5 \cdot 10^{-3} = 8\ \Omega$$

$$X_{L2} = \omega_2 \cdot L = 2\pi f_2 \cdot L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 400 \cdot 25{,}5 \cdot 10^{-3} = 64\ \Omega$$

$$X_{L3} = \omega_3 \cdot L = 2\pi f_3 \cdot L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10^5 \cdot 25{,}5 10^{-3} = 16.000\ \Omega$$

Struje u svitku iznose:

$$I_1 = \frac{U}{X_{L1}} = \frac{120}{8} = 15 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{U}{L_{L2}} = \frac{120}{64} = 1,87 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{U}{X_{L2}} = \frac{120}{16000} = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

Reaktivne snage iznose:

$$Q_1 = U \cdot I_1 = 120 \cdot 15 = 1\,800 \text{ VAr}$$

$$Q_2 = U \cdot I_2 = 120 \cdot 1,87 = 224 \text{ VAr}$$

$$Q_3 = U \cdot I_3 = 120 \cdot 7,5 \cdot 10^{-3} = 0,9 \text{ VAr}$$

**2. primer:** Na izvor naizmenične struje, napona $u = 310 \sin\left(314\,t + \frac{\pi}{2}\right)$, priključen je svitak sa zanemarivim aktivnim otporom i induktivitetom $L = 0,035$ H. Izračunati pokazivanje ampermetra $I$ i voltmetra $U$, reaktivnu snagu $Q$ i energiju $W_M$ magnetskog polja svitka. Napisati jednačine trenutne vrednosti struje i ems samoindukcije.

Rešenje: Efektivna vrednost napona je:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{310}{1,41} = 220 \text{ V}$$

Induktivni otpor svitka iznosi:

$$X_L = 2\pi f \cdot L = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 0,035 = 11\ \Omega$$

Efektivna vrednost struje iznosi:

$$I = \frac{U}{X_L} = \frac{220}{11} = 20 \text{ A}$$

Reaktivna snaga je:

$$Q = U \cdot I = 220 \cdot 20 = 4\,400 \text{ VAr} = 4,4 \text{ kVAr}$$

Maksimalna vrednost struje:

$I_m = I \cdot \sqrt{2} = 20 \cdot 1{,}41 = 28{,}2$ A

Trenutna vrednost struje je:

$i = 28{,}2 \sin 314\, t$ [A]

Trenutna vrednost ems samoindukcije iznosi:

$$e = 310 \sin\left(414\, t - \frac{\pi}{2}\right) [\mathrm{V}]$$

Energija magnetskog polja je:

$$W_M = \frac{L \cdot I_m^2}{2} = L \cdot I^2 = 0{,}035 \cdot 20^2 = 14 \text{ Ws}$$

### 7.3.3. Zadaci za samostalno rešavanje

1. Svitak s induktivitetom $L = 63{,}7$ mH spojen je na mrežu napona $u = 100 \sin 314\, t$. Izračunati maksimalnu $I_m$ i efektivnu $I$ vrednost struje, reaktivnu snagu $Q$ i najveću energiju magnetskog polja svitka $W_M$. Napisati jednačinu trenutne vrednosti struje i ems samoindukcije. Nacrtati krivu promene trenutnih vrednosti napona, struje, ems samoindukcije i vektorski dijagram.

2. Izračunati induktivitet svitka $L$, čiji aktivni otpor ima vrednost nula, ako pri naponu $U = 100$ V i frekvenciji 50 Hz kroz svitak protiče struja $I = 5$ A.

3. Napon $U = 120$ V je u kolu koje sadrži samo induktivitet $L = 31{,}8$ mH. Odrediti induktivne otpore $X_{L1}$, $X_{L2}$, $X_{L3}$, i $X_{L4}$ pri frekvencijama $f_1 = 25$ Hz, $f_2 = 50$ Hz, $f_3 = 75$ Hz i $f_4 = 100$ Hz. Nacrtati dijagram zavisnosti induktivnog otpora od frekvencije. Izračunati efektivne vrednosti struja $I_1$, $I_2$, $I_3$ i $I_4$ i reaktivne snage $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ i $Q_4$ za sve frekvencije.

4. Izračunati efektivnu vrednost struje $I$ i ems samoindukcije $E_L$, frekvenciju struje $f$ i vrednost maksimalnog magnetskog fluksa $\Phi_m$ u svitku, čiji je induktivitet $L = 0{,}1$ H. Energija magnetskog polja je $W_M = 1{,}6$ Ws, napon na stezaljkama svitka je $U = 125{,}6$ V, a broj navoja $W = 100$. Aktivni otpor svitka zanemariti.

5. Efektivna vrednost ems samoindukcije indukovane u kolu s induktivitetom $L = 0{,}01$ H iznosi $E_L = 62{,}8$ V. Izračunati frekvenciju f naizmenične struje u kolu, ako je efektivna vrednost struje $I = 20$ A.

6. Induktivni otpor svitka pri frekvenciji $f = 50$ Hz iznosi $X_L = 148\ \Omega$. Naći induktivitet svitka $L$.

7. Energija nakupljena u magnetskom polju svitka s induktivnim otporom $X_L = 88\ \Omega$ pri frekvenciji struje $f = 50$ Hz iznosi $W_M = 1{,}2$ Ws.

Kolika je efektivna $I$ i maksimalna $I_m$ vrednost struje?

8. Napisati izraz za trenutnu vrednost struje, ako je $X_L = 40\ \Omega$, a $u = 120 \sin(\omega t + 30^\circ)$.

9. Kroz namotaj s induktivitetom $L = 0{,}318$ H protiče sinusoidalna struja $i = 2{,}55 \sin 314\,t$. Koliki su pad napona $U$ na njegovim stezaljkama i ems samoindukcije $E_L$?

10. U kolu s induktivnim otporom $X_L = 30\ \Omega$ ($R = 0$) je napon izvora $u = 180 \sin(314\,t + 50^\circ)$. Napisati izraz za struje i odrediti induktivitet kola $L$.

11. Pri frekvenciji $f = 500$ Hz induktivni otpor svitka je $X_L = 78\ \Omega$. Pri kojoj frekvenciji struje $f'$ induktivni otpor svitka iznosi $X_L' = 12\ \Omega$?

## 7.4. REDNI SPOJ AKTIVNOG OTPORA I INDUKTIVITETA

### 7.4.1. Osnovni pojmovi i formule

1. Trenutne vrednosti struje i napona (sl. 7.4.1) su:

$$i = I_m \sin \omega t; \quad u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

ili

$$u = U_m \sin \omega t; \quad i = I_m \sin(\omega t - \varphi) \tag{7.4.1}$$

2. Napon na stezaljkama kola (sl. 7.4.1) je:

$$\bar{U} = \bar{U}_a + \bar{U}_L, \quad \text{odnosno} \quad U = \sqrt{U_a^2 + U_L^2}\ [\text{V}] \tag{7.4.2}$$

gde su:

$U_a = I \cdot R$ [V] — aktivna komponenta napona (aktivni napon),

$U_L = I \cdot X_L$ [V] — induktivna komponenta napona (induktivni napon).

3. Prividni otpor kola iznosi:

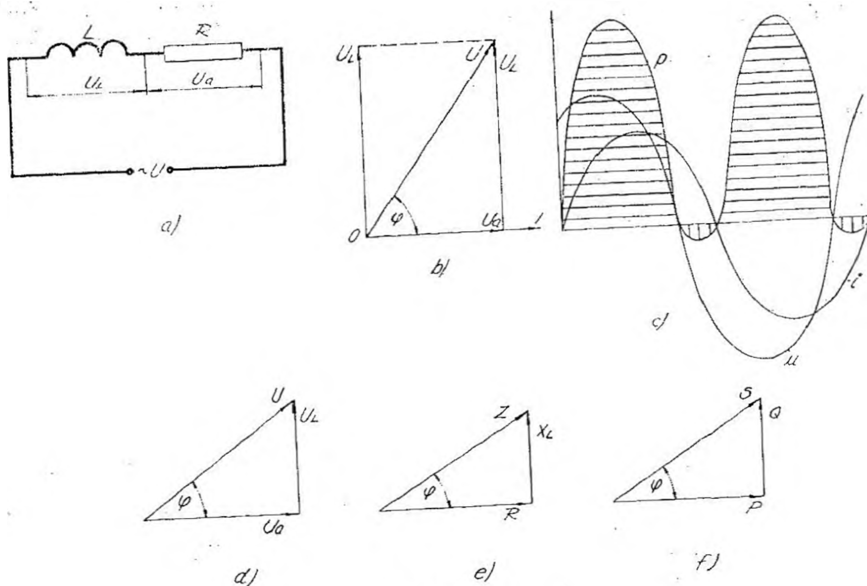
$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2}\,[\Omega] \tag{7.4.3}$$

4. Ugao razlike faza između struje i napona određuje se po jednoj od sledećih formula:

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z}, \quad \sin\varphi = \frac{X_L}{Z}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{X_L}{R} \tag{7.4.4}$$

5. Efektivna vrednost struje je:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}\,[A] \tag{7.4.5}$$




Sl. 7.4.1

6. Aktivna snaga je:

$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi\,[W] \text{ ili } P = I^2 \cdot R\,[W] \text{ ili } P = U_a \cdot I\,[W] \tag{7.4.6}$$

gde je $\cos\varphi$ — koeficijent (faktor) snage kola.

7. Reaktivna snaga je:

$Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi$ [VAr] ili $Q = I^2 \cdot X_L$ [VAr]

ili $Q = U_L \cdot I$ [VAr] (7.4.7)

8. Prividna snaga iznosi:

$$S = U \cdot I = I^2 \cdot Z = \sqrt{P^2 + Q^2} \text{ [VA]} \qquad (7.4.8)$$

9. Aktivna energija je:

$$W_a = P \cdot t = U \cdot I \cdot \cos\varphi \cdot t \text{ [Wh]} \qquad (7.4.9)$$

10. Reaktivna energija je:

$$W_r = Q \cdot t = U \cdot I \cdot \sin\varphi \cdot t \text{ [VArh]}$$

11. Napon na stezaljkama kola pri rednom spoju više potrošača s aktivnim i induktivnim otporom (sl. 7.4.2) iznosi:

$$U = (U_{a1} + U_{a2} + \ldots + U_{an})^2 + (U_{L1} + U_{L2} + \ldots + U_{Ln})^2 \qquad (7.4.10)$$

gde su:

$U_{a1} = I \cdot R_1$, $U_{a2} = I \cdot R_2$

$U_{an} = I \cdot R_n$ [V]

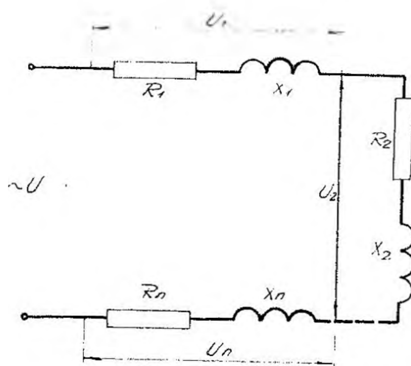
— naponi na aktivnim otporima, a

$U_{L1} = I \cdot X_{L1}$,

$U_{L2} = I \cdot X_{L2}$,

$U_{Ln} = I \cdot X_{Ln}$ [V]

— naponi na induktivnim otporima.



Sl. 7.4.2

12. Prividni otpor kola je:

$$Z = \sqrt{(R_1 + R_2 + \cdots + R_n)^2 + (X_{L1} + X_{L2} + \cdots + X_{L1})^2} \text{ [}\Omega\text{]} \qquad (7.4.11)$$

13. Aktivna snaga iznosi:

$$P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n = U \cdot I \cdot \cos\varphi \text{ [W]} \qquad (7.4.12)$$

14. Reaktivna snaga iznosi:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n = U \cdot I \cdot \sin\varphi \,[\text{VAr}] \qquad (7.4.13)$$

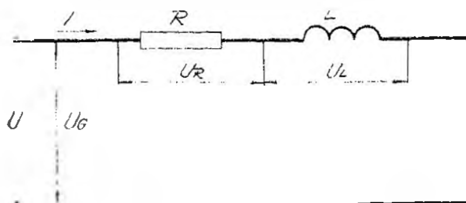
15. Prividna snaga je:

$$S = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2} = I^2 \cdot Z \,[\text{VA}] \qquad (7.4.14)$$

### 7.4.2. **Primeri**

**1. primer:** U kolu (sl. 7.4.3), koje sadrži redno vezane: aktivni otpor $R = 30\,\Omega$ i induktivitet $L = 127$ mH, protiče sinusoidalna struja čija je frekvencija $f = 50$ Hz, amplituda $I_m = 6{,}2$ A, a početna faza je jednaka nuli.

Izračunati napone $U_a$ i $U_L$ na delovima kola i na stezaljkama generatora $U_G$, a takođe i snagu generatora.




**Sl. 7.4.3**

Rešenje: Struja u svakom trenutku stvara na otporu $R$ pod napona:

$$u_a = R \cdot i = RI_m \sin\omega t = 30 \cdot 6{,}2 \sin\omega t = 186 \sin\omega t \,[\text{V}]$$

Maksimalna vrednost napona na otporu $R$ iznosi:

$$U_{am} = I_M \cdot R = 186 \text{ V, a efektivna } U_a = \frac{U_{am}}{\sqrt{2}} = \frac{186}{1{,}41} = 132 \text{ V}$$

ili

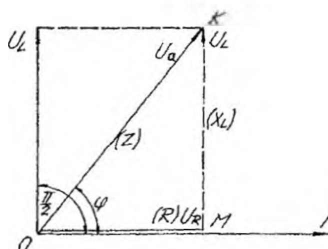
$$U_a = I \cdot R = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot R = \frac{6{,}2}{1{,}41} \cdot 30 = 132 \text{ V}$$

Induktivni pad napona iznosi:

$$U_L = I \cdot X_L = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot 2\pi \cdot f \cdot L = \frac{6{,}2}{1{,}41} 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 127 \cdot 10^{-3} =$$

$$= 176 \text{ V}$$

Sada ćemo nacrtati vektorski dijagram tako da prvo nacrtamo vektore struje $I$ i napona $U_a$ na aktivnom otporu (njihova početna faza jednaka je nuli), a zatim napon na induktivitetu $U_L$ $\left(\text{početna faza} \frac{\pi}{2}\right)$. Na kraju nađemo veličinu vektora napona na stezaljkama kola prema pravilma slaganja vektora (sl. 7.4.4).



Sl. 7.4.4

Algebarski računajući dobijamo:

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_L^2} =$$

$$= \sqrt{132^2 + 176^2} = 220 \text{ V}$$

U razmatranom kolu imamo tri oblika otpora: aktivni, induktivni i prividni.

Aktivni $R = 30\,\Omega$ je zadat. Induktivni otpor je $X_L = \frac{U_L}{I} = \frac{176}{\frac{6{,}6}{\sqrt{2}}} = 40\,\Omega$ a njega možemo izračunati i na sledeći način:

$$X_L = \omega L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 0{,}127 = 40\,\Omega$$

Prividni otpor je:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{220}{4{,}4} = 50\,\Omega$$

ili

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50\,\Omega$$

Treba primetiti da između otpora kola i odgovarajućih napona postoji proporcionalnost. U našem slučaju je:

$$R : X_L : Z = 30 : 40 : 50 = 3 : 4 : 5 \text{ i } U_R : U_L : U =$$

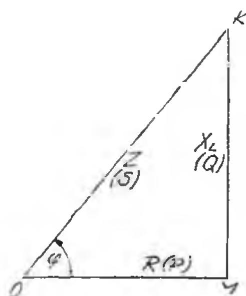
$$= 132 : 176 : 220 = 3 : 4 : 5$$

Radi toga možemo za otpore nacrtati trougao (sl. 7.4.5) sličan trouglu napona.

Moguć je i drugi način, ako se koristimo jednim te istim trouglom *OMK* (sl. 7.4.4) i za napone i otpore. Pri tome je očigledno potrebno imati različite razmere strana trougla za merenje napona i otpora. Ako izaberemo za trougao *OMK* (sl. 7.4.4) dužine strana 25, 32 i 40 mm, dobijamo onda

razmeru napona: $M_u = \frac{132}{25} = 5{,}28\ \frac{\text{V}}{\text{mm}}$

razmeru otpora: $M_z = \frac{30}{25} = 1{,}2\ \frac{\Omega}{\text{mm}}$



**Sl. 7.4.5**

Iz trougla *OMK* (sl. 7.4.4) ugao razlike faza dobijamo pomoću izraza:

$\cos\varphi = \frac{U_a}{U} = \frac{R}{Z} = \frac{3}{5} = 0{,}6$, čemu odgovara razlika faza između napona i struje $\varphi \approx 53°$.

Na kraju izračunajmo još i snage:

aktivna snaga:

$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi = 220 \cdot 4{,}4 \cdot 0{,}6 = 581\ \text{W}$

reaktivna snaga:

$Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi = 220 \cdot 4{,}4 \cdot 0{,}8 = 774\ \text{VAr}$

prividna snaga:

$S = U \cdot I = 220 \cdot 4{,}4 = 968\ \text{VA}$

Aktivna $P$, reaktivna $Q$ i prividna snaga $S$ su proporcionalne otporima $R$, $X_L$ i $Z$ (prema izrazima 7.4.6, 7.4.7 i 7.4.8 tako da trougao otpora (sl. 7.4.5) možemo smatrati u drugoj razmeri kao trougao snaga (označeno u zagradi):

**2. primer:** Jednofazni motor se napaja električnom energijom iz transformatorske stanice, koja se nalazi od njega na rastojanju $l = 50$ m. Korisna snaga na osovini motora je $P_2 = 7360$ W, stepen

6. Pri određivanju induktivnog otpora $X_L$ i induktiviteta $L$ svitka bez železa »$U-I$« metodom koristimo se voltmetrom zanemarivo male struje paralelno vezanim sa svitkom i ampermetrom redno pridodatom kombinaciji svitka i voltmetra. Pri primeni sinusoidnog napona frekvencije 50 Hz, očitali smo $U=65$ V i $I=2{,}5$ A. Ako je $R=10\,\Omega$ (aktivni otpor namotaja svitka), koliko iznose $X_L$, $L$, prividni otpor $Z$ svitka, pripadna snaga $P$, kao i faktor snage $\cos\varphi$ i ugao $\varphi$?

7. Koliki će uz isti $U$ postati $X_L$, $Z$, $I$, $P$, $\cos\varphi$ i $\varphi$ iz 6. zadatka, ako frekvencija poraste na 500 Hz?

8. Svitak sa $R=30\,\Omega$ i $L=0{,}1$ H propušta pri naponu $U=400$ V struju 8 A. Naći ugaonu i numeričku frekvenciju $f$ napona i struje, faktor snage i komponente napona $U_a$ i $U_L$.

9. Svitak je prvo uključen na izvor jednosmernog napona $U=100$ V, a zatim na izvor sinusoidalnog napona $U=100$ V i frekvencije $f=50$ Hz. U prvom slučaju struja iznosi 5 A, a u drugom 4 A. Koliki su induktivni otpor i induktivitet svitka? Aktivni otpor svitka uzeti jednakimj njegovom otporu pri proticanju jednosmerne struje kroz njega.

10. Potrošač električne energije radi pri naponu $U=500$ V sa snagom $P=25$ kW. Koliki su gubici snage u vodovima $\Delta P_1$, $\Delta P_2$ i $\Delta P_3$, koji spajaju potrošač s generatorom pri faktorima snage potrošača $\cos\varphi_1=0{,}2$, $\cos\varphi_2=0{,}8$ i $\cos\varphi_3=0{,}95$, ako je otpor provodnika $R=0{,}1\,\Omega$?

11. Aktivni otpor alučeličnog provodnika je $R=0{,}45\,\Omega/\text{km}$, a induktivni otpor $X_L=0{,}44\,\Omega/\text{km}$. Koliki je prividni otpor $Z$ provodnika dužine $l=100$ km?

12. Koliko iznose: napon $U_2$, snaga $P_2$ i faktor snage $\cos\varphi_2$ potrošača koji pri frekvenciji 50 Hz uzima struju $I=20$ A iz izvora napona $U=5\,000$ V? Faktor snage je $\cos\varphi=0{,}647$. Dužina voda je $l=12$ km. Provodnici su od bakra, provodljivosti $G=50\,\dfrac{\text{S}\cdot\text{m}}{\text{mm}_2}$, prečnika 5 mm i razmaka 50 cm.

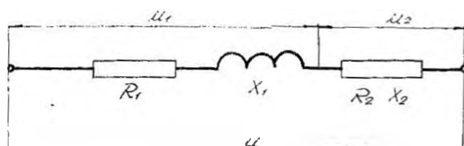
13. Napisati izraz za trenutne vrednosti napona ($u$) i struje ($i$) kola (sl. 7.4.8), ako je poznato:

$$u_1 = 80 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) [\mathrm{V}]$$

$$u^2 = 60 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) [\mathrm{V}]$$

$$R_1 = 4\,\Omega,\ L_1 = 9{,}55\,\mathrm{mH},\ f = 50\,\mathrm{Hz}$$

Odrediti otpore $R_2$ i $X_2$. Nacrtati vektorski dijagram napona i struje.




Sl. 7.4.8

14. Sinhroni jednofazni generator unutrašnjeg otpora $R_1 = 0{,}3\,\Omega$ i $X_{L1} = 2\,\Omega$, napaja potrošač $R_2 = 30\,\Omega$ i $X_{L2} = 10\,\Omega$. Napon na stezaljkama potrošača je $U_2 = 6\,000\,\mathrm{V}$. Kolike su ems generatora $E$, snaga razvijena u njemu, struja u kolu i stepen korisnog dejstva generatora?

15. U mreži naizmenične struje, napona $U = 127\,\mathrm{V}$ i frekvencije $f = 50\,\mathrm{Hz}$, uključeni su redno dva potrošača; prvi s aktivnim otporom $R_1 = 12\,\Omega$ i induktivitetom $L_1 = 22{,}2\,\mathrm{mH}$ i drugi s aktivnim otporom $R_2 = 8\,\Omega$ i induktivitetom $L_2 = 9{,}55\,\mathrm{mH}$. Izračunati struju u kolu $I$, snagu potrebnu celom kolu $P$ i snage potrošača $P_1$ i $P_2$. Nacrtati trougle napona, otpora i snage za svaki potrošač i za celo kolo.

16. Nominalna snaga generatora naizmenične struje je $S = 750\,\mathrm{kVA}$, a nominalni napon $U = 6{,}3\,\mathrm{V}$. Kolika je nominalna struja generatora $I$ i aktivna snaga $P$ pri $\cos\varphi = 0{,}8$?

17. Potrošač električne energije, snage $P = 360\,\mathrm{kW}$, $\cos\varphi = 0{,}8$, uključen je na kraju jednofazne mreže. Aktivni otpor svakog

provodnika iznosi $R_1 = 2{,}5\,\Omega$, a induktivni $X_{L1} = 3{,}3\,\Omega$. Koliki su napon na početku mreže $U_1$, pad napona u mreži $I \cdot Z_{mr}$ gubitak napona u mreži $\Delta U$, induktivitet linije $L_1$, induktivitet potrošača $L_2$, induktivitet celog kola $L$? Napon na stezaljkama potrošača je $U_2 = 6\,\text{kV}$.

18. U kolu naizmenične struje napona $U = 120\,\text{V}$ i frekvencije $f = 50\,\text{Hz}$ uključeni su redno: reostat, čiji je aktivni otpor $R_1 = 6\,\Omega$ i svitak s aktivnim i induktivnim otporom. Snaga potrebna svitku iznosi: $P_2 = 80\,\text{W}$ pri struji $I = 10\,\text{A}$. Koliki su: induktivitet $L$ svitka, napon na stezaljkama reostata $U_1$ napon na stezaljkama svitka $U_2$ i faktor snage $\cos\varphi$?

## 7.5. KOLO NAIZMENIČNE STRUJE S KAPACITETOM

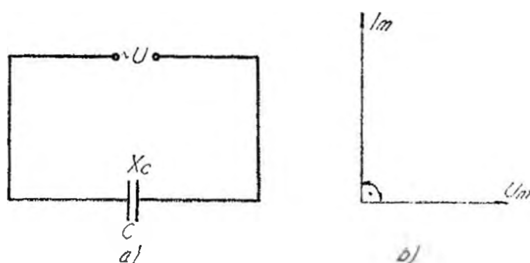
### 7.5.1. Osnovni pojmovi i formule

1. Trenutne vrednosti napona i struje u kolu s kapacitetom (sl. 7.5.1) su:

$$u = U_m \sin \omega t \qquad i = I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

ili

$$i = I_m \sin \omega t \qquad u = U_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \tag{7.5.1}$$




Sl. 7.5.1

2. Ugao razlike faza između struje i napona je:

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{\pi}{2} = -90^\circ$$

3. Kapacitivni otpor je:

$$X_c = \frac{1}{\omega C} [\Omega] \qquad (7.5.2)$$

gde su:

$C$ [F] — kapacitet kondenzatora,

$\omega \left[\frac{1}{s}\right]$ — ugao frekvencija.

4. Omov zakon glasi:

$$I = U \cdot \omega \cdot C = \frac{U}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{U}{X_C} [A] \qquad (7.5.3)$$

5. Energija električnog polja kondenzatora iznosi:

$$W_c = \frac{U_m^2 \cdot C}{2} = U^2 \cdot C [Ws] \qquad (7.5.4)$$

gde su:

$W_C$ [Ws] — energija,

$C$ [F] — kapacitet kondenzatora,

$U_m$ [V] — maksimalna vrednost napona,

$U$ [V] — efektivna vrednost napona.

6. Reaktivna snaga u kolu s kapacitetom je:

$$Q_c = U \cdot I = I^2 \cdot \omega \cdot C = W_C \cdot \omega [VAr] \qquad (7.5.5)$$

7. Aktivna snaga kola s kapacitetom je:

$P = 0$

### 7.5.2. **Primeri**

**1. primer:** Kondenzator kapaciteta 318 $\mu$F uključen je u mrežu naizmenične struje, frekvencije $f = 50$ Hz i napona $U = 120$ V. Koliki su: struja $I$ u kolu, reaktivna snaga $Q$ i energija $W_C$ električnog polja?

Rešenje: Kapacitivni otpor je:

$$X_C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 318 \cdot 10^{-6}} = 10\,\Omega$$

iskorišćenja $\eta = 80\%$, napon $U_2 = 220$ V, faktor snage $\cos\varphi_2 = 0{,}85$. Priključni vod je izrađen od bakra preseka $S = 10\ mm^2$. Kolika je snaga $P$ potrebna kolu? Prividni otpor namotaja motora je $Z_2 = 4{,}47\ \Omega$ (dobijen merenjem).

Rešenje: Korisna snaga motora iznosi:

$$P_2 = 7360\ W$$

Ukupna snaga motora je:

$$P_1 = \frac{P_2}{\eta} = \frac{7360 \cdot 100}{80} = 9200\ W$$

Struja u kolu je:

$$I = \frac{P_1}{U_2 \cdot \cos\varphi_2} = \frac{9200}{220 \cdot 0{,}85} = 49{,}2\ A$$

Aktivni otpor namota motora je:

$$R_2 = Z_2 \cdot \cos\varphi_2 = 4{,}47 \cdot 0{,}85 = 3{,}8\ \Omega$$

Aktivni otpor provodnika je:

$$R_p = \frac{2 \cdot \varrho \cdot l}{S} = \frac{2 \cdot 0{,}0175 \cdot 50}{10} = 0{,}175\ \Omega$$

Aktivni otpor čitavog kola iznosi:

$$R = R_2 + R_p = 3{,}8 + 0{,}175 = 3{,}975\ \Omega$$

Snaga potrebna kolu je:

$$P = I^2 \cdot R = 49{,}2^2 \cdot 3{,}975 = 9544\ W$$

### 7.4.3. Zadaci za samostalno rešavanje

1. Potrošač aktivnog optpora $R = 30\ \Omega$ i induktiviteta $L = 127{,}4$ mH uključen je na mrežu naizmenične struje napona $U = 120$ V i frekvencije 50 Hz. Koliki su struja $I$, ugao razlike faza $\varphi$, faktor snage $\cos\varphi$, prividna snaga $S$, aktivna snaga $P$ i reaktivna snaga $Q$, padovi napona $U_a$ i $U_L$ na aktivnom i induktivnom otporu? Nacrtati trougle napona, otpora i snage.

2. U cilju određivanja induktiviteteta $L$ svitka i njegovog aktivnog otpora $R$ izmeren je napon na stezaljkama svitka i struja kroz njegove namotaje (sl. 7.4.6) pri dve različite frekvencije $f_1$ i $f_2$ sinusoidalnog napona izvora $u$.

Dobijene su sledeće vrednosti:

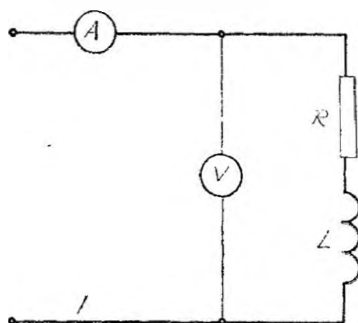
$U_1 = 60$ V, $I_1 = 10$ A

$f_1 = 50$ Hz

$U_2 = 60$ V $I_2 = 6$ A

$f_2 = 100$ Hz

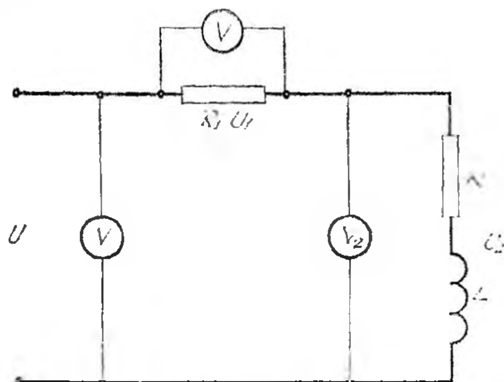
Izračunati $L$ i $R$.



Sl. 7.4.6

3. Kroz svitak pri frekvenciji $f = 0$ i naponu izvora $U = 120$ V protiče struja $I = 20$ A, a pri $f = 50$ Hz i $U = 220$ V struja $I = 28{,}2$ A, Odrediti induktivitet $L$.

4. Za određivanje parametra $R$ i $L$ svitka izmeren je napon na njegovim stezaljkama $U = 20$ V, snaga svitka $P = 100$ W i struja $I = 10$ A. Koliki su $R$ i $L$, ako je frekvencija napona izvora $f = 50$ Hz?



Sl. 7.4.7

5. Pomoću tri voltmetra (pri poznatom aktivnom otporu $R_1 = 5\ \Omega$) izvršena su merenja napona $U = 149$ V, $U_1 = 50$ V i $U_2 = 121$ V pri frekvenciji napona izvora $f = 50$ Hz (sl. 7.4.7). Izračunati pomoću vektorskog dijagrama i analitički parametre svitka $R$ i $L$.

Struja u kolu iznosi:

$$I = \frac{U}{X_C} = \frac{120}{10} = 12 \text{ A}$$

Reaktivna snaga je:

$$Q = U \cdot I = 120 \cdot 12 = 1\,440 \text{ VAr}$$

Energija električnog polja kondenzatora iznosi:

$$W_C = U^2 \cdot C = 120^2 \cdot 318 \cdot 10^{-6} = 4{,}58 \text{ Ws}$$

### 7.5.3. Zadaci za samostalno rešavanje

1. Kondenzator kapaciteta $C = 20\,\mu\text{F}$ uključen je u kolo napona $u = 179 \sin 314\,t$. Napisati jednačinu za trenutnu vrednost struje. Kolike su: efektivna vrednost struje $I$, frekvencija $f$, reaktivna snaga $Q$ i energija električnog kola $W_C$ kondenzatora? Nacrtati vektorski dijagram.

2. Baterija kondenzatora snage $Q = 728$ kVar služi za popravak faktora snage ($\cos\varphi$) postrojenja. Spojena je na mrežu naizmenične struje napona $U = 6$ kV i frekvencije $f = 50$ Hz. Koliki su: struja $I$ u kolu i kapacitet $C$ baterije kondenzatora?

3. Odrediti kapacitivne otpore $X_{C1}$, $X_{C2}$, $X_{C3}$, $X_{C4}$ i $X_{C5}$ kondenzatora $C = 31{,}8\,\mu\text{F}$ pri frekvenciji $f_1 = 0$, $f_2 = 100$ Hz $f_3 = 200$ Hz, $f_4 = 400$ Hz i $f_5 = 1\,000$ Hz. Nacrtati grafičku zavisnost kapacitivnog otpora od frekvencije.

4. U kolu s kondenzatorom kapaciteta $C = 5\,\mu\text{F}$ protiče struja $I = 342$ A. Odrediti frekvenciju struje $f$, ako je napon na stezaljkama kondenzatora $U = 218$ V.

5. U kolu s kondenzatorom protiče struja $I = 0{,}2$ A. Odrediti kapacitet kondenzatora $C$, ako je napon na njegovim stezaljkama $U = 125$ V, a frekvencija struje $f = 50$ Hz.

6. U kolu desetopolnog generatora, napona $U = 500$ V, uključen je kondenzator. Koliki je kapacitet kondenzatora, ako je brzina obrtanja generatora $n = 600$ o/min i ako u kolu generatora protiče struja $I = 2$ A?

7. Kondenzator kapaciteta $C = 20\ \mu F$ uključen je u kolo osmopolnog generatora, čija je brzina obrtanja $n = 750$ o/min. Napon na stezaljkama generatora menja se po zakonu $u = 169 \sin \omega t$. Odrediti kapacitivni otpor $X_C$, efektivnu vrednost struje $I$ i maksimalnu vrednost struje $I_m$.

8. Telefonski filtar ima tri redno spojena kondenzatora kapaciteta $C_1 = 1{,}0\ \mu F$, $C_2 = 0{,}5\ \mu F$ i $C_3 = 0{,}5\ \mu F$. Odrediti ekvivalentni kapacitivni otpor $X_C$ pri frekvenciji $f = 800$ Hz.

9. U elektrotermičkom postrojenju, napona $U = 375$ V, za kompenzaciju reaktivne snage spojen je kondenzator snage $Q = 125$ VAr. Koliki su: struja $I$ u kolu kondenzatora, kapacitet $C$ i maksimalna energija $W_C$ električnog polja kondenzatora? Frekvencija je 2 500 Hz.

10. Na vodovima napona 220 kV primenjena je uzdužna kapacitivna kompenzacija, koja se sastoji u tome da je u svaku fazu uključena baterija od 112 kondenzatora. Baterija se sastoji od 14 grupa kondenzatora spojenih redno. Svaka grupa sastoji se iz osam kondenzatora kapaciteta po 160 $\mu F$ spojenih međusobno paralelno. Koliki su kapacitet svake grupe $C_{gr}$, kapacitet baterije $C_b$ (faze) i kapacitivni otpor $X_C$ faze pri frekvenciji $f = 50$ Hz? Nacrtati šemu.

## 7.6. REDNI SPOJ AKTIVNOG OTPORA I KAPACITETA

### 7.6.1. **Osnovni pojmovi i formule**

1. Trenutne vrednosti struje i napona su:

$$u = U_m \sin \omega t; \quad i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

ili

$$i = I_m \sin \omega t; \quad u = U_m \sin(\omega t - \varphi) \qquad (7.6.1)$$

2. Napon na stezaljkama kola (sl. 7.6.1) je:

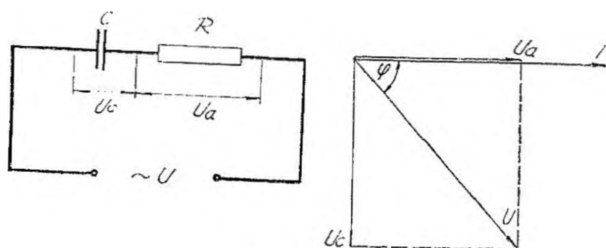
$$U = \sqrt{U_a^2 + U_C^2}\ [\mathrm{V}] \qquad (7.6.2)$$

gde su:

$U_a$ [V] — aktivna komponenta napona,
$U_c$ [V] — kapacitivna (reaktivna) komponenta napona.

3. Prividni otpor kola iznosi:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2} \, [\Omega] \quad (7.6.3)$$




Sl. 7.6.1

gde su:

$R$ [Ω] — aktivni otpor,

$X_C$ [Ω] — kapacitivni otpor.

4. Omov zakon glasi:

$$I = \frac{U}{Z} \, [A] \quad (7.6.4)$$

5. Ugao razlike faza između struje i napona možemo naći iz izraza (sl. 7.6.1):

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} \qquad \sin\varphi = \frac{X_C}{Z} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{X_C}{R} \quad (7.6.5)$$

6. Aktivna snaga je:

$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi = I^2 \cdot R \, [W] \quad (7.6.6)$$

7. Reaktivna snaga iznosi:

$$Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi = I^2 \cdot X_C \, [VAr] \quad (7.6.7)$$

8. Prividna snaga je:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = U \cdot I = I^2 \cdot Z \, [VA] \quad (7.6.8)$$

### 7.6.2. Primer

**1. primer:** Reostat otpor $R = 30\,\Omega$ i kondenzator kapaciteta $C = 220\,\mu F$ spojeni su redno i uključeni na mrežu naizmenične struje napona $U = 220$ V i frekvencije $f = 50$ Hz. Odrediti efektivnu vrednost struje $I$, ugao razlike faza između struje i napona $\varphi$, napon na stezaljkama reostata $U_a$, napon na pločama kondenzatora $U_C$, aktivnu snagu $P$, reaktivnu snagu $Q$ i prividnu snagu $S$. Nacrtati trougle napona, otpora i snage.

Rešenje: Kapacitivni otpor kondenzatora je:

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} = \frac{10^6}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 220} = 14{,}45\,\Omega$$

Prividan otpor kola je:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C{}^2} = \sqrt{30^2 + 14{,}45^2} = 33\,\Omega$$

Efektivna vrednost struje u kolu iznosi:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{23} = 6{,}67\text{ A}$$

Faktor snage je:

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{30}{33} = 0{,}909$$

Ugao razlike faza je prema tome:

$$\varphi = 24^\circ\,40'$$

Napon na stezaljkama reostata iznosi:

$$U_a = I \cdot R = 6{,}67 \cdot 30 = 200\text{ V}$$

a napon na pločama kondenzatora:

$$U_C = I \cdot X_C = 6{,}67 \cdot 14{,}45 = 96{,}45\text{ V}$$

Aktivna snaga je:

$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi = 220 \cdot 6{,}67 \cdot 0{,}909 = 1\,324\text{ W},$$ a

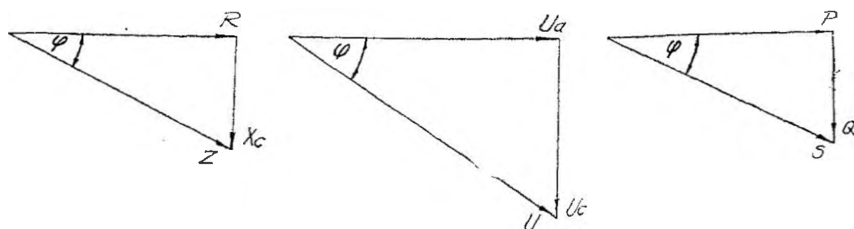
reaktivna snaga:

$$Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi = 220 \cdot 6{,}67 \cdot 0{,}417 = 612\text{ VAr}$$

Prividna snaga iznosi:

$$S = U \cdot I = 220 \cdot 6{,}67 = 1\,467\text{ VA}$$

Trouglovi napona, otpora i snage dati su na sl. 7.6.2.




Sl. 7.6.2

### 7.6.3. Zadaci za samostalno rešavanje

1. U mreži naizmenične struje, napona $U = 120$ V i frekvencije $f = 50$ Hz, uključeni su redno reostat otpora $R = 12\,\Omega$ i kondenzator kapaciteta $C = 65\,\mu$F. Odrediti efektivnu vrednost struje $I$, ugao rezlike faza između struje i napona $\varphi$, napona na stezaljkama reostata $U_a$, napon na pločama kondenzatora $U_C$, aktivnu snagu $P$, reaktivnu snagu $Q$, i prividnu snagu $S$. Nacrtati trougle napona, otpora i snage.

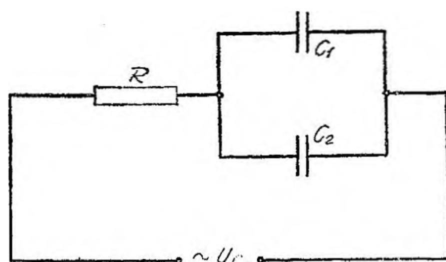
2. Reostat otpora $R = 100\,\Omega$ i kondenzator kapaciteta $2\,\mu$F spojeni su redno. Napon na stezaljkama kondenzatora iznosi $u = 10 \sin 5\,000\, t$. Kolike su trenutne vrednosti struje, napona na stezaljkama otpora i ukupnog napona? Odrediti potrebnu aktivnu snagu.

3. Kondenzator je priključen redno sa sijalicom snage 500 W, napona $U = 127$ V. Naponi na kondenzatoru i sijalici su isti. Frekvencija struje je $f = 50$ Hz. Naći kapacitet kondezatora $C$.

4. Kondenzator, čiji je otpor $X_C = 60\,\Omega$, redno je spojen s električnom sijalicom čiji je otpor $R = 80\,\Omega$; i spojeni su na mrežu naizmenične struje, frekvencije $f = 50$ Hz. Odrediti vrednost struje $I$, ugao razlike faze $\varphi$ između struje i napona, pad napona na kondenzatoru $U_C$ i njegov kapacitet $C$, ako je poznato da se u kolu troši snaga $P = 200$ W.

5. U kolu naizmenične struje frekvencije $f = 50$ Hz koje se sastoji od aktivnog otpora i kapacitivnog otpora uključeni su ampermetar, voltmetar i vatmetar. Voltmetar pokazuje $U = 120$ V, ampermetar $I = 20$ A, vatmetar $P = 144$ W. Nacrtati šemu. Koliki su aktivni otpor $R$ i kapacitet $C$?

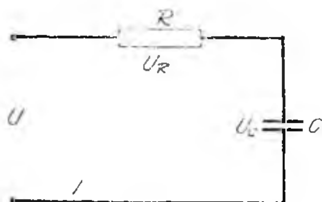
6. Na sl. 7.6.3 je $R = 10\,\Omega$, $C_1 = 100\,\mu F$, $C_2 = 200\,\mu F$. Koliki su: naponi izvora na stezaljkama $U$, aktivna snaga $P$, reaktivna snaga $Q$ i faktor snage $\cos\varphi$, ako kroz aktivni otpor protiče struja $I = 12{,}7$ A frekvencije $f = 50$ Hz?



Sl. 7.6.3

7. Napon na prvom kondenzatoru je $U_{C1} = 20$ V, a otpor kondenzatora $X_{C1} = 50\,\Omega$, aktivni otpor $R = 200\,\Omega$. Kapacitet drugog kondenzatora je dvaput manji od kapaciteta prvog. Naći napon na stezaljkama izvora prema sl. 7.6.5.

8. Pri merenju kapacitivnog otpora $X_C$ i kapaciteta $C$ kondenzatora pomoću «$U-I$« metode analognim onom iz zadatka 7.4.3.6, ali sa ispitivanim kondenzatorom umesto svitka. Očitano je na voltmetru $U = 91$ V, a na ampermetru $I = 0{,}10$ A. Pretpostavljajući da je $\omega = 314$ naći $X_C$ i $C$.



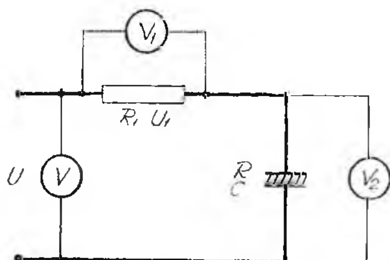
Sl. 7.6.4



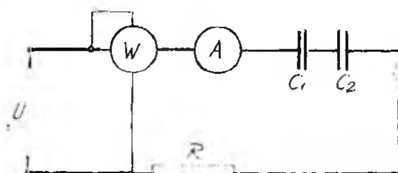
Sl. 7.6.5

9. U kolu, koje se sastoji od kondenzatora i reostata (sl. 7.6.4) priveden je napon $U = 155 \sin\left(314\,t + \frac{\pi}{3}\right)$. Izračunati struju $I$ u kolu i razliku faza $\varphi$ napona i struje. Nacrtati krive $U$ i $I$ kao funkcije vremena, a takođe i vektorski dijagram, ako je $R = 5\,\Omega$ i $C = 300\,\mu F$.

10. Za određivanje parametra $R$ i $C$ nesavršenog kondenzatora pomoću tri voltmetra izmereni su naponi $U=193$ V, $U_1=60$ V i $U_2=180$ V (sl. 7.6.6). Frekvencija napona izvora na stezaljke iznosi 50 Hz, a otpor je $R_1=20\,\Omega$. Izračunati pomoću vektorskog dijagrama i anlitičke vrednosti $R$ i $C$.




Sl. 7.6.6




Sl. 7.6.7

11. Kako se menja (povećava ili smanjuje) pokazivanje instrumenata na šemi (sl. 7.6.7) pri:

a) kratkom spoju otpora $R$ i

b) proboju ploča kondenzatora $C_2$?

## 7.7. REDNI SPOJ AKTIVNOG OTPORA, INDUKTIVITETA I KAPACITETA

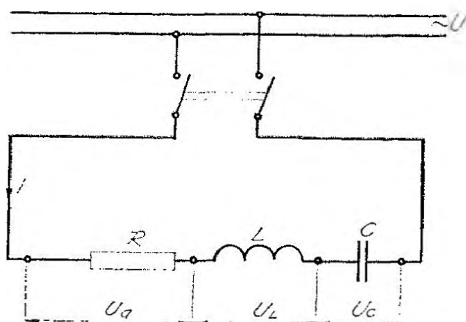
### 7.7.1. Osnovni pojmovi i formule

Na sl. 7.7.1 prikazana je šema radne veze aktivnog, induktivnog i kapacitivnog otpora, odnosno svih otpora koji se u kolu naizmenične struje mogu pojaviti:

Prema Kirhofovim zakonima kroz sve otpore teče ista struja, a napon mreže jednak je vektorskom zbiru pojedinih padova napona:

$$\bar{U}=\bar{U}_a+\bar{U}_L+\bar{U}_C=$$

$$=\overline{I\cdot R}+\overline{I\cdot\omega L}+\overline{\frac{I}{\omega C}}\,[\mathrm{V}] \qquad (7.1.7)$$




Sl. 7.7.1

Ovo sabiranje izvršićemo najbolje grafički, kao što je prikazano na sl. 7.7.2. Sa iste slike, prema Pitagorinoj teoremi, imamo:

$$U^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = (IR)^2 + \left(I\omega L - \frac{I}{\omega C}\right)^2,$$

odnosno:

$$U^2 = I^2\left[R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right] = I^2(R^2 + X^2),$$

odnosno:

$$U = I\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = I\sqrt{R^2 + X^2}$$

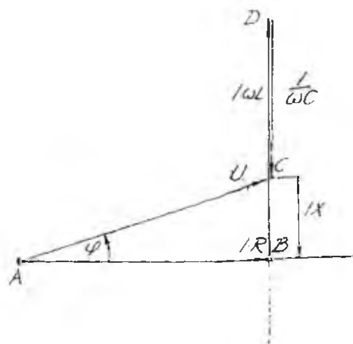
Odatle dobijemo:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X^2}}\,[\mathrm{A}] \qquad (7.7.2)$$

Jednačina 7.7.2 predstavlja potpun Omov zakon za naizmeničnu struju, gde je prividni otpor:

$$Z = \sqrt{R_2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{R^2 + X^2}\,[\Omega] \qquad (7.7.3)$$




Sl. 7.7.2

Snagu kod ove veze izračunaćemo kao i ranije, samo moramo voditi računa o faznom uglu između napona i struje $\left(\cos\varphi = \frac{R}{Z}\right)$:

$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi = U \cdot \frac{U}{Z} \cdot \frac{R}{Z} = \frac{U^2}{Z^2} \cdot R = I^2 \cdot R\,[\mathrm{W}] \qquad (7.7.4)$$

### 7.7.2. Primeri

**1. primer:** Na izvor struje napona $U = 220$ V i frekvencije $f = 50$ Hz priključeno je kolo se sastoji od redno spojenih: aktivnog otpora $R = 50\ \Omega$, induktiviteta $L = 40$ mH i kapaciteta $C = 50\ \mu$F. Odrediti efektivnu vrednost struje $I$, aktivnu $U_a$, induktivnu $U_L$, i kapacitivnu $U_C$ komponentu napona, faktor snage $\cos\varphi$, ugao razlike faza $\varphi$ između struje i napona, aktivnu $P$ i reaktivnu snagu $Q$. Nacrtati trougle napona, otpora i snage.

Rešenje: Induktivni otpor je:

$$X_L = 2\pi \cdot f \cdot L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 40 \cdot 10^{-3} = 12{,}56\ \Omega$$

Kapacitivni otpor je:

$$X_C = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} = \frac{10^6}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 50} = 63{,}7\ \Omega$$

Prividni otpor kola iznosi:

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2} = \sqrt{50^2 + (63{,}7 - 12{,}56)^2} = 71{,}5\ \Omega$$

Efektivna vrednost struje je:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{71{,}5} = 3{,}06\ \text{A}$$

Aktivna komponenta napona iznosi:

$$U_a = I \cdot R = 3{,}06 \cdot 50 = 153\ \text{V}$$

a induktivna komponenta napona:

$$U_L = I \cdot X_L = 3{,}06 \cdot 12{,}56 = 38{,}4\ \text{V}$$

Kapacitivna komponenta napona je:

$$U_C = I \cdot X_C = 3{,}06 \cdot 63{,}7 = 195\ \text{V}$$

Faktor snage iznosi:

$\cos\varphi = \dfrac{R}{Z} = \dfrac{50}{71{,}5} = 0{,}7$, čemu odgovara ugao razlike faza:

$$\varphi = -45^\circ\, 20' \ (\sin\varphi = 0{,}715)$$

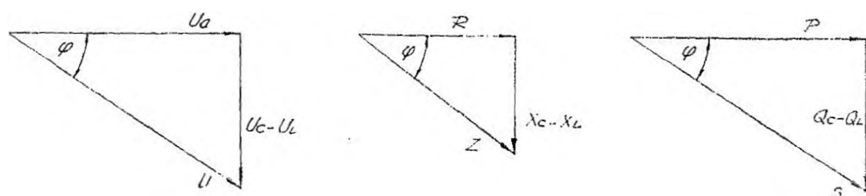
Aktivna snaga je:

$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi = 220 \cdot 3{,}06 \cdot 0{,}7 = 471 \text{ W},$$

a reaktivna snaga:

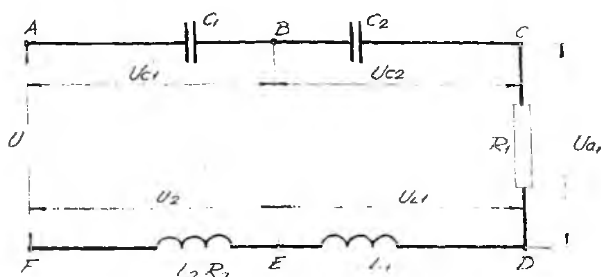
$$Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi = 220 \cdot 3{,}06 \cdot 0{,}715 = 481 \text{ VAr}$$

Trougli napona, otpora i snage dati su na sl. 7.3.3.




Sl. 7.3.3

**2. primer:** Kolo prikazano na sl. 7.7.4 sadrži dva kondenzatora s kapacitetom $C_1 = 1{,}6$ μF i $C_2 = 0{,}4$ μF, reostat s aktivnim otporom $R_1 = 500\,\Omega$ i dva svitka induktivnosti $L_1 = 69$ mH i $L_2 = 0{,}11$ H. Aktivni otpor prvog svitka možemo zanemariti, a drugog iznosi $R_2 = 100\,\Omega$. Na stezaljkama $A$ i $F$ napon je $U = 100$ V, a frekvencija f = 400 Hz.




Sl. 7.7.4

Treba odrediti struju u kolu, padove napona na delovima kola, aktivnu i reaktivnu snagu svakog elementa i sastaviti bilans snage.

Rešenje: Prvo ćemo odrediti otpor kola.

Kapacitivni otpori kondenzatora su:

$$X_{C1} = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot f\cdot C_1} = \frac{1}{2\cdot 3{,}14\cdot 400\cdot 1{,}6\cdot 10^{-6}} = 250\ \Omega$$

$$X_{C2} = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot f\cdot C_2} = \frac{1}{2\cdot 3{,}14\cdot 400\cdot 0{,}4\cdot 10^{-6}} = 1000\ \Omega$$

Ako izračunamo otpor $X_{C1}$, onda možemo brže izračunati otpor $X_{C2}$ na sledeći način:

$$\frac{X_{C1}}{X_{C2}} = \frac{\dfrac{1}{2\cdot\pi\cdot f\cdot C_2}}{\dfrac{1}{2\cdot\pi\cdot f\cdot C_1}} = \frac{C_1}{C_2}, \text{ odakle je:}$$

$$X_{C2} = X_{C1}\frac{C_1}{C_2} = 250\frac{1{,}6}{0{,}4} = 1\,000\ \Omega$$

Induktivni otpori svitka su:

$$X_{L1} = 2\cdot\pi\cdot f\cdot L_1 = 2\cdot 3{,}14\cdot 400\cdot 69\cdot 10^{-3} = 175\ \Omega$$

$$X_{L2} = 2\cdot\pi\cdot f\cdot L_2 = 2\cdot 3{,}14\cdot 400\cdot 0{,}11 = 275\ \Omega$$

Ili, slično kao i kod izračunavanja $X_{C2}$ dobijamo:

$$X_{L2} = X_{L1}\frac{L_2}{L_1} = 175\frac{0{,}11}{0{,}069} = 275\ \Omega$$

Ukupni aktivni otpor je:

$$R = R_1 + R_2 = 500 + 100 = 600\ \Omega$$

Ukupni induktivni otpor je:

$$X_L = X_{L1} + X_{L2} = 175 + 275 = 450\ \Omega$$

Ukupni kapacitivni otpor iznosi:

$$X_C = X_{C1} + X_{C2} = 250 + 1\,000 = 1250\ \Omega$$

Reaktivni otpor celog kola je:

$$X = 450 - 1\,250 = -800\ \Omega$$

Prividni otpor drugog svitka je:

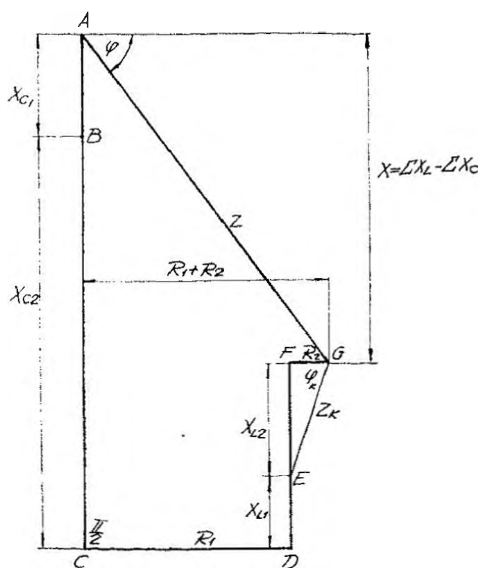
$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_{L2}^2} = \sqrt{100^2 + 275^2} = 292\ \Omega, \text{ a}$$

prividni otpor celog kola:

$$Z=\sqrt{R^2+X^2}=\sqrt{600^2+(-800)^2}=1\,000\,\Omega$$

Sada ćemo nacrtati dijagram (trougao) otpora (sl. 7.7.5). U razmeri $M=20\,\Omega/\text{mm}$ nanesimo iz tačke $A$ nadole (u smeru ose $y$) vrednost kapacitivnih otpora $X_{C1}$ i $X_{C2}$ (odresci $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$), zatim pod uglom $+\frac{\pi}{2}$ vrednost $R_1$ (odrezak $\overline{CD}$), a iz tačke $D$ nagore (u smeru ose $+y$) vrednost $X_{L1}$ i $X_{L2}$ (odresci $\overline{DE}$ i $\overline{EF}$). Na kraju nanosimo vrednost $R_2$ (odrezak $\overline{FG}$). Strana $\overline{AG}$ zatvorenog poligona predstavlja prividni otpor $Z$ u datoj razmeri.

Iz dijagrama očitamo da je duž $\overline{AG}=50$ mm, pa je $Z=M_Z\cdot\overline{AG}=20\cdot 50=$ $=1\,000\,\Omega$, što smo već dobili i analitički.




Sl. 7.7.5

Pošto smo izračunali otpore, izračunaćemo struju i napone.

Struja u kolu je:

$$I=\frac{U}{Z}=\frac{100}{1000}=$$

$$=0{,}1\text{ A}$$

Padovi napona na elementima kola (sl. 7.7.4) su:

$$U_{C1}=I\cdot X_{C1}=0{,}1\cdot 250=25\text{ V}$$
$$U_{C2}=I\cdot X_{C2}=0{,}1\cdot 1000=100\text{ V}$$
$$U_{a1}=I\cdot R_1=0{,}1\cdot 500=50\text{ V}$$
$$U_{L1}=I\cdot X_{L1}=0{,}1\cdot 175=17{,}5\text{ V}$$
$$U_{a2}=I\cdot R_2=0{,}1\cdot 100=10\text{ V}$$
$$U_{L2}=I\cdot X_{L2}=0{,}1\cdot 275=27{,}5\text{ V}$$

Izvršićemo kontrolu dobijenih rezultata prema drugom Kirhofovom zakonu:

$$U = \sqrt{\Sigma U_a^2 + \Sigma (U_L - U_C)^2} =$$

$$= \sqrt{(50 + 10)^2 + (17,5 + 27,5 - 25 - 100)^2}$$

$$= \sqrt{60^2 + 80^2} = 100 \text{ V}$$

Vektorski dijagram napona može se dobiti zamenivši na sl. 7.7.5 otpore sa odgovarajućim naponima. Pri tome razmera napona iznosi:

$$M_u = M_z \cdot I = 20 \cdot 0,1 = 2 \text{ V/mm}$$

Iz dijagrama nađimo, na primer, napon na stezaljkama kola:

$$U = M_u \cdot AG = 2 \cdot 50 = 100 \text{ V}$$

što se poklapa sa zadatom vrednošću.

Pri izračunavanju snage treba voditi računa da su u svitku s induktivitetom $L_1$ i u oba kondenzatora aktivni otpori jednaki nuli. Prema tome, u tim elementima nema radne snage. Treba izračunati samo njihove reaktivne snage koje iznose:

$$Q_{L1} = I \cdot U_{L1} = 0,1 \cdot 17,5 = 1,75 \text{ VAr}$$

$$Q_{C1} = I \cdot U_{C1} = 0,1 \cdot 25 = 2,5 \text{ VAr}$$

$$Q_{C2} = I \cdot U_{C2} = 0,1 \cdot 100 = 10 \text{ VAr}$$

Otpor $R_1$ ima aktivnu snagu:

$$P_1 = I \cdot U_{a1} = 0,1 \cdot 50 = 5,0 \text{ W}$$

a njegova reaktivna snaga jednaka je nuli.

Drugi svaki ima aktivnu i reaktivnu snagu:

$$P_2 = I^2 \cdot R_2 = (0,1)^2 \cdot 100 = 1 \text{ W}$$

$$Q_{L2} = I^2 \cdot X_{L2} = (0,1)^2 \cdot 275 = 2,75 \text{ VAr}$$

Aktivna snaga kola je:

$$P = P_1 + P_2 = 5,0 + 1,0 = 6 \text{ W}$$

ili

$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi = U \cdot I \frac{R}{Z} = 100 \cdot 0,1 \frac{600}{1000} = 6 \text{ W}$$

Reaktivna snaga kola je:

$$Q=(Q_{L1}+Q_{L2})-(Q_{C1}+Q_{B2})=(1{,}75+2{,}75)-(2{,}5+10)=$$
$$=-8\ \text{VAr}$$

ili

$$Q=U\cdot I\cdot\sin\varphi=U\cdot I\,\frac{X}{Z}=100\cdot 0{,}1\,\frac{-800}{1000}=-8\ \text{VAr}$$

Dijagram otora (sl. 7.7.5) može poslužiti i kao dijagram snage, samo u razmeri za snagu:

$$M_S=M_Z\cdot I^2=20\,(0,\ 1)^2=0{,}2\ \frac{\text{VA}}{\text{mm}}$$

Razmera aktivne i reaktivne snage brojčano je jednaka. Iz dijagrama na sl. 7.7.5 odredićemo grafičkim putem ukupnu snagu kola:

$$S=M_S\cdot AG=0{,}2\cdot 50=10\ \text{VA}$$

### 7.7.3. Zadaci za samostalno rešavanje

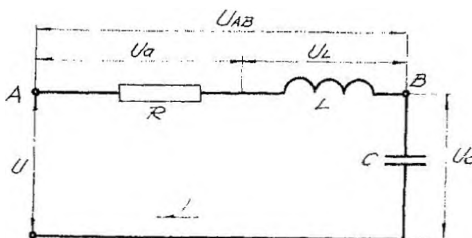
1. Potrošač električne energije, aktivnog otpora $R=500\,\Omega$, induktiviteta $L=1{,}2$ H i kapaciteta $C=8\,\mu$F, uključen je u kolo naizmenične struje, frekvencije $f=50$ Hz. Napon na stezaljkama kola je $U=125$ V. Odrediti prividni otpor kola $Z$, efektivnu vrednost struje $I$, aktivnu $U_a$, induktivnu $U_L$ i kapacitivnu $U_C$ komponentu napona, aktivnu $P$ i reaktivnu $Q$ snagu kola. Nacrtati trouglove napona, otpora i snaga kola.

2. U kolu naizmenične struje, frekvencije $f=50$ Hz, uključen je motor s aktivnim otporom $R=12\,\Omega$ i induktivitetom $L=0{,}2$ H. Koliki kapacitet $C$ kondenzatora treba uključiti u to kolo da bi $\cos\varphi$ kola bio jednak jedinici?

3. Odrediti induktivitet kola $L$ naizmenične struje, ako je aktivni otpor $R=340\,\Omega$, kapacitet $C=2{,}5\,\mu$F, a struja u kolu $I=0{,}20$ A. Napon na stezaljkama kola je $U=220$ V, a frekvencija $f=50$ Hz.

4. Odrediti kapacitet $C$ kola naizmenične struje aktivnog otpora $R=580\,\Omega$ i induktiviteta $L=0{,}5$ H. Struja je $I=0{,}286$ A, napon na stezaljkama kola $U=220$ V, a frekvencija $f=50$ Hz.

5. U kolu (sl. 7.7.6) je struja $I = 200$ A, faktor snage $\cos\varphi = 0{,}85$. Koliki su naponi $U$, $U_a$, $U_L$ i $U_C$, ako je $R = 0{,}255\ \Omega$ i $X_C = 10\ \Omega$?




Sl. 7.7.6

6. Nerazgranato kolo, sastoji se od induktiviteta $L = 200$ mH i kapaciteta $C = 0{,}8\ \mu$F i napaja se iz generatora napona $U = 110$ V i frekvencije $f = 200$ Hz. Odrediti struju $I$, napone $U_L$ i $U_C$, aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu kola. Nacrtati vektorski dijagram struja i napona.

7. U kolu prikazanom na sl. 7.7.6 napon $U_{AB} = 80$ V, a njegova početna faza je $\varphi'_{AB} = 30°$. Naći trenutne vrednosti i nacrtati vektorske dijagrame za napone $u_a$, $u_L$ i $u_C$. Izračunati njihove efektivne vrednosti ako je $U_C = 40$ V, a početna faza struje jednaka nuli.

8. U kolu (sl. 7.7.6) je $U = 50$ V, $U_L = 40$ V, $U_a = 40$ V, $R = 80\ \Omega$ i $f = 200$ Hz. Odrediti induktivitet i dve vrednosti kapaciteta, koje obezbeđuje zadati režim kola.

9. Aktivna snaga kola (sl. 7.7.6) je $P = 120$ W, faktor snage $\cos\varphi = 0{,}7$, a kapacitivna reaktivna snaga je $Q_C = 200$ VAr. Izračunati vrednosti otpora $R$ i induktiviteta $L$, ako je napon na stezaljkama $U = 220$ V, a frekvencija $f = 50$ Hz.

10. Izvor, napona $U = 180$ V i frekvencije $f = 500$ Hz, napaja kolo (sl. 7.7.6) u kojem je prividna snaga $S$ dva puta veća od reaktivne snage $Q$. Kolike su vrednosti aktivnog otpora, induktiviteta i kapaciteta, ako je struja u kolu $I = 50$ mA, a napon na kapacitetu 120 V?

11. U kolu (sl. 7.7.6) napon na stezaljkama je $U = 120$ V, struja $I = 2{,}4$ A i aktivna snaga $P = 200$ W. Induktivni otpor $X_L$ dva puta je veći od kapacitivnog otpora $X_C$. Izračunati aktivni otpor, induktivitet i kapacitet kola pri frekvenciji $f = 50$ Hz.

12. Za izračunavanje parametra $R$, $L$ i $C$ kola, prikazanog na sl. 7.7.6 izvršen je opit. Menjali smo frekvenciju sinusoidalne ems generatora i održavali napon na stezaljkama kola konstantnim ($U = 100$ V). Merili smo struju $I$ u kolu pri tri različite frekvencije, tako da pri frekvenciji $f_1 = 50$ Hz i $f_3 = 100$ Hz struja ima istu vrednost $I = 10$ A, a pri frekvenciji $f_2$ struja dostiže svoju maksimalnu vrednost $I = 20$ A. Izračunati $R$, $L$, $C$ i frekvenciju $f_2$.

13. Na stezaljkama kola (sl. 7.7.6) napon je $U = 220$ V, frekvencije $f = 50$ Hz. Pri punom kapacitetu baterije kondenzatora fazometar, uključen u kolo pokazuje $\cos\varphi_1 = 0{,}707$ ($\varphi_1 > 0$), pri polovini kapaciteta $\cos\varphi_2 = 1$, a pri jednoj četvrtini kapaciteta $\cos\varphi_3 = 0.446$ ($\varphi_3 < 0$). Izračunati parametre kola $R$, $L$, $C$, struju i srednju snagu u kolu za sva tri slučaja.

14. Poznato je da je u kolu, prikazanom na sl. 7.7.6, u trenutku $t = 0$ rezerva energije magnetskog polja svitka bila $W_M = 2{,}18$ $W_S$, a rezerva energije u električnom polju kondenzatora $W_E = 4{,}13$ $W_S$ i snaga $p = -805$ W. Napon na stezaljkama svitka je $U_L = 208$ V, pri struji $i > 0$. Parametri kola su: $L = 100$ mH, $R = 10\,\Omega$, a frekvencija napona izvora je $f = 50$ Hz. Izračunati $U$, $I$, $C$, $Z$, $\cos\varphi$ i $P$. Odrediti početne faze $\varphi_u$ i $\varphi_i$ napona i struje i nacrtati krive $u$, $u_R$, $u_L$, $u_C$, $P$, $P_R$, $P_L$, $I_C$ i $i$ u zavisnosti od vremena.

15. Na šemi na sl. 7.7.6 poznate su efektivne vrednosti tri napona. Treba nacrtati vektorski dijagram napona i struja i odrediti efektivnu vrednost nepoznatog (četvrtog) napona. Naći razliku faza $\varphi$ između ukupnog napona i napona za sledeće slučajeve:

1) $U_a = 10$ V, $U_L = 20$ V, $U_C = 10$ V, $U = ?$

2) $U_a = ?$ $U_L = 110$ V, $U_C = 150$ V, $U = 50$ V

3) $U_a = 10$ V, $U_L = 10$ V, $U_C = ?$, $U = 5\sqrt{5}$ V

4) $U_a = 10$ V, $U_L = ?$, $U_C = 10\sqrt{3}$, V, $u = 20$ V

16. Asinhroni motor spojen je na mrežu naizmenične struje ($U = 110$ V, $f = 50$ Hz) preko redno uključenog kondenzatora $C = 6{,}5\,\mu$F. Struja u kolu motora i kondenzatora je $I = 0{,}6$ A, faktor snage celog kola $\cos\varphi = 0{,}85$. Odrediti ekvivalentne parametre motora.

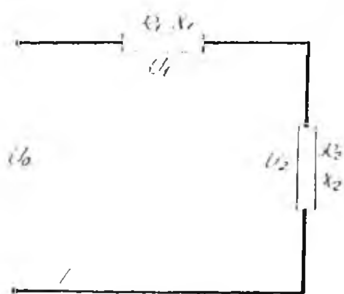
17. Kolo se sastoji od redno uključena dva svitka ($L_1 = 80$ mH, $R_1 = 200\ \Omega$, $L_2 = 20$ mH, $R_2 = 10\ \Omega$), dva kondenzatora ($C_1 = 0{,}4\ \mu$F i $C_2 = 1{,}2\ \mu$F) i reostata ($R_3 = 70\ \Omega$). Napajan je iz izvora naizmenične struje s naponom $U = 115$ V i frekvencije $f = 400$ Hz. Izračunati struju u kolu, napone na svicima i kondenzatorima, aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu kola. Sastaviti bilans aktivne i reaktivne snage. Nacrtati vektorske dijagrame.

18. Prema uslovima 17. zadatka nacrtati šemu s ekvivalentnim parametrima i nacrtati za nju vektorski dijagram i trougao otpora.

19. Razlika faza između napona $U_{AB}$ i struje u kolu (sl. 7.7.6) iznosi 53°: $U_{AB} = 325$ V. Koliki su struja $I$, napon $U$ i otpor $R$, ako je $R_L = 10\ \Omega$ i $X_C = 6\ \Omega$.

20. Svitak s induktivitetom $L_s$ i aktivnim otporom $R_s$ spojen je redno s kondenzatorom kapaciteta $C = 2\ \mu$F. Napon na svitku je $U_s = 120$ V, a na kondenzatoru $U_c = 60$ V. Razlika u fazi između napona $U_s$ i $U_c$ iznosi 120°. Odrediti aktivni i induktivni otpor svitka i napon izvora, ako je frekvencija struje $f = 100$ Hz.

21. Energija se prenosi od generatora po vodovima ka potrošaču čiji je napon na stezaljkama $U_2 = 220$ V i faktor snage $\cos\varphi_2 = 0{,}8$ (sl. 7.7.7). Struja u kolu je $I = 25$ A. Provodnici imaju aktivni otpor $R_1 = 1\ \Omega$ i induktivni otpor $X_{L1} = 2{,}5\ \Omega$. Naći (grafički i analitički) napon na stezaljkama generatora $U$ i faktor snage celog kola $\cos\varphi$ za slučajeve $\varphi_2 > 0$ i $\varphi_2 < 0$. Izračunati snagu $P$ generatora i stepen iskorišćenja voda $\eta$.



Sl. 7.7.7

22. Naponi na stezaljkama generatora i potrošača su: $U = U_2 = 3\,000$ V. Struja u provodnicima je $I = 50$ A. Parametri voda su: $R_1 = 3\ \Omega$ i $X_1 = 10\ \Omega$. Koliki je faktor snage potrošača $\cos\varphi_2$ i celog kola $\cos\varphi$.

23. Parametri provodnika voda su: $R_1 = 1\ \Omega$ i $X_1 = 2{,}5\ \Omega$, a potrošača $X_2 = 6\ \Omega$ i $R_2$ = promenljivo. Napon na stezaljkama generatora je $U = 660$ V. Kojoj vrednosti otpora $R_2$ odgovara maksimalna snaga $P_{2max}$ (snaga potrošača) i maksimalna snaga $P_{max}$ generatora? Za te slučajeve izračunati: $I$, $\cos\varphi$, $P_2$, $P$, $\eta$ i $U_2$.

## 7.8. REDNA ILI NAPONSKA REZONANSA

### 7.8.1. **Osnovni pojmovi i formule**

Kada pri jednoj vezi aktivnog otpora, induktiviteta i kapaciteta (sl. 7.7.6) nastupi slučaj da je kapacitivni pad napona jednak induktivnom, odnosno da su induktivni i kapacitivni otpori međusobno jednaki, onda struja u kolu zavisi od omskog otpora, a napon i struja su u fazi. To je slučaj naponske rezonanse, koji je dobio naziv po tome što su napon svitka i napon kondenzatora jednaki. Iz izloženog se vidi da je:

$X_L = X_C$, odnosno: (7.8.1)

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

To predstavlja uslov za pojavu rezonanse. Ovaj uslov može biti ispunjen na tri različita načina:

1) Ako su $\omega$ i $C$ stalne veličine, onda induktivnost moramo prema jednačini 7.8.1 podesiti tako da imamo:

$$L_R = \frac{1}{\omega^2 \cdot C} \text{ [H]} \qquad (7.8.2)$$

2) Ako su, pak, $\omega$ i $L$ stalne veličine, onda će rezonansa nastupiti kada podesimo da je:

$$C_R = \frac{1}{\omega^2 L} \text{ [F]} \qquad (7.8.3)$$

3) Rezonansa nastupa i onda ako kružna učestanost iznosi:

$$\omega_R^2 = \frac{1}{L \cdot C} \quad \text{ili} \quad \omega_R = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \qquad (7.8.4)$$

a to znači kad je:

$$f_R = \frac{1}{2 \cdot \pi \sqrt{L \cdot C}} \text{ [Hz]} \qquad (7.8.5)$$

Ovaj treći uslov se najčešće javlja u praksi.

### 7.8.2. **Primeri**

**1. primer:** Kolo se sastoji od svitka, aktivnog otpora $R = 44\,\Omega$ i induktiviteta $L = 0{,}64$ H i kondenzatora kapaciteta $C = 15{,}9$ F uključenih redno. Odrediti frekvenciju $f_R$ pri kojoj će nastupiti rezonansa, struju $I$, napon na induktivitetu $U_L$ i kapacitetu $U_C$ u trenutku rezonanse napona, ako je napon na stezaljkama kola $U = 220$ V.

Rešenje: Rezonantna frekvencija je:

$$f_R = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\cdot C}} = \frac{1}{2\cdot 3{,}14\sqrt{0{,}64\cdot 15{,}9\cdot 10^{-6}}} = 50\ \text{Hz}$$

Prividni otpor kola u trenutku rezonanse je:

$Z = R = 44\,\Omega$

Struja u kolu iznosi:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{220}{44} = 5\ \text{A}$$

Napon na induktivitetu je:

$$U_L = I\cdot X_L = I\cdot 2\pi f\cdot L = 5\cdot 2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 0{,}64 = 1\,000\ \text{V}$$

a napon na kapacitetu:

$$U_C = I\cdot X_C = \frac{5\cdot 10^6}{2\cdot 3{,}14\cdot 50\cdot 15{,}9} = 1\,000\ \text{V}$$

### 7.8.3. **Zadaci za samostalno rešavanje**

1. Svitak s induktivitetom $L = 150$ mH i kondenzatorom $C = 470$ pF i reostat otpora $R = 5\,\Omega$ spojeni su redno. Kolo se napaja iz izvora napona $U = 10$ V. Odrediti rezonantnu frekvenciju $f_R$ i napone $U_L$ i $U_D$ pri rezonansi.

2. Nerazgranato kolo od redno uključenih elemenata $R$, $L$ i $C$ napaja se iz izvora napona $U = 110$ V i frekvencije $f = 200$ Hz. U kolu je nastala naponska rezonansa. Odrediti struju u kolu, padove napona na induktivnom, kapacitivnom i aktivnom otporu, a takođe i vrednost kapaciteta, ako je $R = 50\,\Omega$ i $L = 0{,}1$ H. Nacrtati vektorski dijagram i trougao otpora.

3. Prema uslovima u prethodnom zadatku odrediti koliko je puta napon na induktivitetu i kapacitetu veći od napona izvora u režimu rezonanse, ako se aktivni otpor umanji za 10 puta.

4. Pri merenju induktiviteta svitka $L_s$ on sa kondenzatorom i ampermetrom obrazuje nerazgranato kolo priključeno na generator niske frekvencije. Menjajući frekvenciju generatora doveli smo kolo u rezonansu. Odrediti induktivitet $L_s$, ako je rezonantna frekvencija $f_R = 80$ Hz i $C = 2\,\mu$F.

5. Kolo od redno spojenog svitka ($L$ i $R$) i kondenzatora $C$ napaja se naponom $U = 12$ V i frekvencije $f = 200$ Hz. Odrediti proizvode $L \cdot C$, pri kojima u kolu nastaje rezonansa i aktivni otpor svitka, ako snaga izvora ne može preći vrednost 6 W.

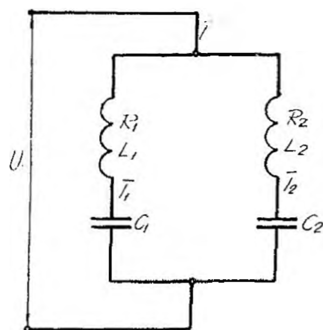
6. Pri vrednostima $L = 2$ H i $C = 5\,\mu$F u rednom kolu nastala je rezonansa pri frekvenciji $f_{R1}$. Zatim se frekvencija napona generatora umanjila za vrednost $\Delta f$ i postala jednaka $f_{R2}$. Prilikom pojave rezonanse izmerili smo i kapacitet za vrednost $\Delta C = 1\,\mu$F. Odrediti $f_{R1}$ i $f_{R2}$.

# 8. RAZGRANATA KOLA NAIZMENIČNE STRUJE

## 8.1. PRIMENA VEKTORSKOG DIJAGRAMA ZA REŠAVANJE RAZGRANATIH KOLA

### 8.1.1. Osnovni pojmovi i formule

Kod paralelnog spoja dva ili više potrošača $R_1-L_1-C_1$, $R_2-L_2-C_2, \ldots$ (sl. 8.1.1) na svaku granu delovao bi ceo napon, a pripadni referentni vektor $U$ povukli bismo u smeru osi apcisa. Struje $I_1$, $I_2, \ldots, I_n$ pojedinih grana određujemo prema izrazu:




Sl. 8.1.1

$$I_n = \frac{U}{\sqrt{R_n^2 + \left(\omega L_n - \frac{1}{C_n \cdot \omega}\right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R_n^2 + X_n^2}} = \frac{U}{Z_n} \text{ [A]} \qquad (8.1.1)$$

a uglove $\varphi_1$, $\varphi_2, \ldots$ prema izrazu:

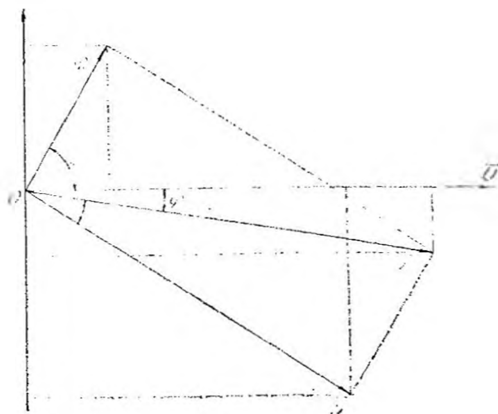
$$\varphi_n = \operatorname{arctg} \frac{\omega L_n - \frac{1}{C_n \cdot \omega}}{R_n} = \frac{X_n}{R_n} \qquad (8.1.2)$$

Rezultantna struja $I$ bila bi rezultanta parcijalnih struja, pa se odgovarajuće $I$ i $\varphi$ mogu izmeriti iz vektorske slike (sl. 8.1.2).

Računski (analitički) bi se $I$ i $\cos\varphi$ mogli odrediti pomoću aktivnih i reaktivnih komponenata parcijalnih struja:

$$I=\sqrt{\Sigma I_x^2+\Sigma I_y^2}\ [\mathrm{A}] \qquad (8.1.3)$$

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\Sigma I_y}{\Sigma I_x}\ [^\circ] \qquad (8.1.4)$$



Sl. 8.1.2

Struju $I$ bismo mogli dobiti i po kosinusnoj teoremi, ukoliko bismo sabirali dve parcijalne struje:

$$I=\sqrt{I_1^2+I_2^2+2\,I_1\cdot I_2\cos(\varphi_1+|\varphi_2|)}\ [\mathrm{A}] \qquad (8.1.5)$$

Tada bismo po sinusovoj teoremi za trougao $OKM$ imali (sl. 8.1.4):

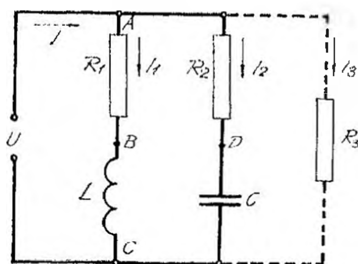
$$\frac{I}{\sin(\varphi_1+|\varphi_2|)}=\frac{I}{\sin(\varphi_1-\varphi)} \qquad (8.1.6)$$

odakle bismo uz poznate $\varphi_1$, $\varphi_2$ i $I$ našli $\varphi_1$.

Razume se da bi se problemi znatno pojednostavili ako bi u pojedinim granama dolazili samo neki od elemenata $R$, $L$ i $C$.

### 8.1.2. Primeri

**1. primer:** Razgranato kolo (sl. 8.1.3) sastoji se od dve paralelne grane s parametrima $R_1 = 80\ \Omega$, $R_2 = 260\ \Omega$, $L = 0,19$ H $C = 21,2\ \mu$F. Kolo se napaja iz generatora sinusoidalnog napona $U = 120$ V i frekvencije $f = 50$ Hz (granu sa strujom $I_3$, pokazanu na slici crtkano, ne uzimati u obzir).



Sl. 8.1.3

Odrediti struje u granama $I_1$ i $I_2$, struju $I$, aktivnu i reaktivnu snagu kola. Izračunati napon $U_{BD}$.

Rešenje: Prvo ćemo izračunati struje prema izrazu (8.1.1):

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{U}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}} = \frac{120}{\sqrt{80^2 + (314 \cdot 019)^2}} = 1,2\ \text{A}$$

$$I_2 = \frac{U}{Z_2} = \frac{U}{\sqrt{R_2^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{120}{\sqrt{260^2 + \left(\frac{10^6}{314 \cdot 21,2}\right)^2}} = 0,4\ \text{A}$$

Ove struje pomerene su u fazi u odnosu na napon za uglove (ne vodimo računa o predznaku):

$$\varphi_1 = \arccos\frac{R_1}{Z_1} = \arccos\frac{80}{100} = 37^\circ$$

$$\varphi_2 = \arccos\frac{R_2}{Z_2} = \arccos\frac{260}{300} = 30^\circ$$

Ukupnu struju $I$ i njenu razliku faze nalazimo prema izrazima (8.1.5 i 8.1.6):

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \cos(\varphi_1 + |\varphi_2|)} =$$

$$= \sqrt{1,2^2 + 0,4^2 + 2 \cdot 1,2 \cdot 0,4 \cdot 0,39} = 1,4\ \text{A}$$

$$\sin(\varphi_1 - \varphi) = \frac{I_2}{I}\sin 67^\circ = \frac{0,4}{1,4} \cdot 0,92 = 0,264$$

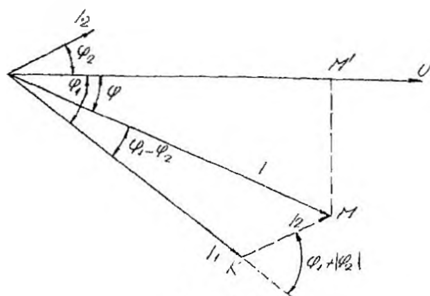
odakle dobijemo da je:

$$\varphi = \varphi_1 - 15^\circ 24' = 21^\circ 40'$$

Dobijene vrednosti $I$ i $\varphi$ možemo odrediti i grafičkim putem: uzmimo da dijagram (sl. 8.1.4) crtamo u razmeri $M_i = 0{,}32$ A/cm.

Tada imamo struju $I = OM \cdot M_i = 4{,}4 \cdot 0{,}32 = 1{,}4$ A, a

$$\varphi = \text{arctg}\,\frac{MM'}{M'O} = \text{arctg}\,\frac{16}{42} = 22^\circ$$



Sl. 8.1.4

Aktivna snaga celog kola je:

$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi = 120 \cdot 1{,}4 \cdot \cos 22^\circ = 157 \text{ W}$$

a sastoji se od snaga grana:

$$P_1 = I_1^2 \cdot R_1 = (1{,}2)^2 \cdot 80 = 115 \text{ W}$$

$$P_2 = I_2^2 \cdot R_2 = (0{,}4)^2 \cdot 260 = 42 \text{ W}$$

Kontrola:

$$P_1 + P_2 = 115 + 42 = 157 \text{ W} = P$$

Reaktivna snaga celog kola je:

$$Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi = 120 \cdot 1{,}4 \cdot \sin 22^\circ = 62 \text{ VAr}$$

a jednaka je algebarskoj sumi reaktivnih snaga grana:

$$Q_1 = U \cdot I_1 \cdot \sin\varphi_1 = 120 \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}6 = 86 \text{ VAr}$$

$$Q_2 = U \cdot I_2 \cdot \sin\varphi_2 = 120 \cdot 0{,}4 \cdot (-0{,}5) = -24 \text{ VAr}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = 86 + (-24) = 62 \text{ VAr}$$

To je očigledno, jer prividni otpor prve grane ima induktivni karakter ($\varphi_1 > 0$), a druge grane kapacitivni ($\varphi_2 < 0$).

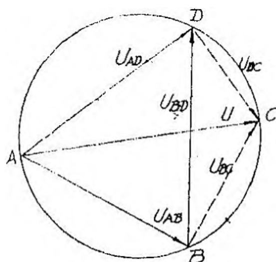
Na kraju izračunajmo napon $U_{BD}$ između tačaka $B$ i $D$ (sl. 8.1.3). Sastavimo jednačinu prema drugom Kirhofovom zakonu za konturu $ABCDA$. Obilazeći konturu u smeru suprotnom smeru kretanja kazaljke na satu imamo:

$$\bar{U}_{AB}+\bar{U}_{BC}-\bar{U}_{DC}-U_{AD}=0.$$

Kako je:

$\bar{U}_{BC}-\bar{U}_{DC}=U_{BD}$ onda je traženi napon između tačaka $B$ i $D$.

$\bar{U}_{BD}=\bar{U}_{AD}-\bar{U}_{AB}$. Tražene vektore određujemo kao geometrijsku razliku vektora padova napona na otporima $R_1$ i $R_2$.



Sl. 8.1.5

Uzimajući da je pad napona $\bar{U}_{AD}=I_2\cdot R_2=0{,}4\cdot 260=104$ V u fazi sa strujom $I_2$, a $\bar{U}_{AB}=I_1\cdot R_1=1{,}2\cdot 80=96$ V, u fazi sa strujom $I_1$ dobijamo prema dijagramu (sl. 8.1.5) crtanom u razmeri $M_u=4$ [V/mm]:

$$U_{BD}=M_u\cdot BD=4\cdot 28=112 \text{ V}$$

Očigledno je da napon $U_{BD}$ možemo izračunati i analitički ako znamo ugao $\varphi_1+|\varphi_2|$ i strane $\overline{AD}$ i $\overline{AB}$ trougla.

**2. primer:** Uzmimo da je u kolu na sl. 8.1.3 iz prvog primera paralelno spojena treća grana koja se sastoji od otpora $R_3=250\,\Omega$.

Nova grana ne utiče na vrednost struje prve dve grane (pri zadatom naponu $U$) i zbog toga struje $I_1$ i $I_2$ ostaju iste.

Struja $I_3$ iznosi:

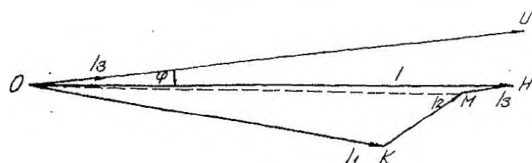
$$I_3=\frac{U}{R_3}=\frac{120}{250}=0{,}48 \text{ A}$$

a na vektorskom dijagramu je u fazu s naponom $U$ (sl. 8.1.6).

Struja $I$ je jednaka geometrijskoj sumi struja $I_1$, $I_2$ i $I_3$ što odgovara strani $\overline{OH}$, koja zatvara trougao $OKMH$. On je crtan u razmeri $M_1=0{,}50$ A/cm. U tom slučaju struja $I$ je:

$$I=OH\cdot M_1=3{,}7\cdot 0{,}5=1{,}85 \text{ A}$$

Ukupnu struju možemo izračunati analitički. Nađimo projekcije svakog vektora struje na osi $x$ i na osi $y$ (sl. 8.1.7). Projekcija ukupne struje $I$ na osi $x$ (odrezak $\overline{OH'}$) jednaka je sumi projekcija struja grana: $I_x = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3} = I_1 \cos \varphi_1 + I_2 \cos \varphi_2 + I_3 \cos 0° = 1,2 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,86 + 0,48 \cdot 1 = 1,78$ A




Sl. 8.1.6

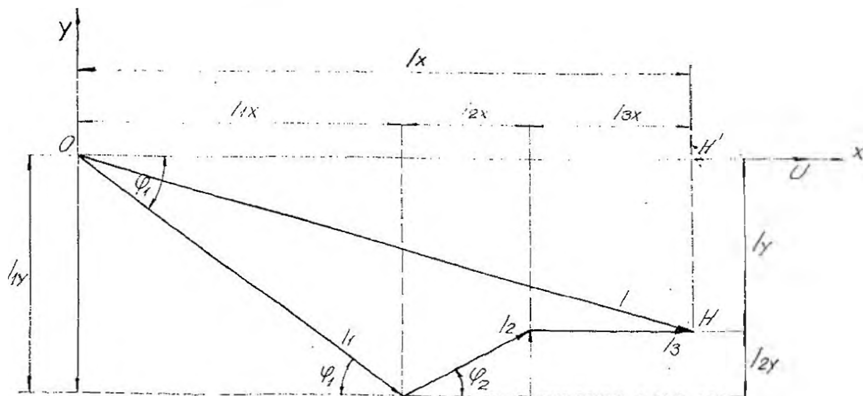
Projekcija ukupne struje na osi $y$ (odrezak $\overline{HH'}$) iznosi:

$I_{y2} = I_{1y} - I_{2y} + I_{3y} = I_1 \sin \varphi_1 - I_2 \cdot \sin \varphi_2 + 0 = 1,2 \cdot 0,6 - 0,4 \cdot 0,5 = 0,52$ A

Iz trougla $\overline{OHH'}$ imamo:

$$I = \sqrt{I_x^2 + I_y^2} = \sqrt{(1,78)^2 + (0,52)^2} = 1,85 \text{ A}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_y}{I_x} = \frac{0,52}{1,78} = 0,292 \text{ ili } \varphi = 16° \, 5'$$




Sl. 8.1.7

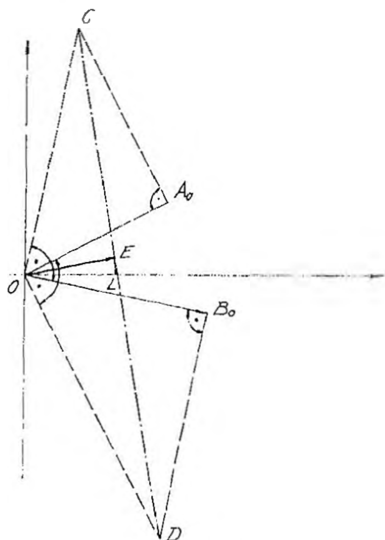
### 8.1.3. Zadaci za samostalno rešavanje

U poglavlju 8.3.3 dati su zadaci koji se mogu rešavati na napred opisani način.

## 8.2. GRAFIČKI POSTUPAK ZA DOBIJANJE KOMBINACIONOG (UKUPNOG) OTPORA PARALELNOG SPOJA DVA PRIVIDNA OTPORA

### 8.2.1. Osnovni pojmovi i formule

U prethodnoj glavi videli smo da se problemi naizmeničnih struja mogu rešavati pomoću vektorskih dijagrama. Takvo rešavanje zadataka je teško, a pogotovu ako se radi o komplikovanijim problemima. Zato ćemo sada pokazati kako se grafičkim putem može odrediti ukupni otpor paralelnog spoja dva prividna otpora.



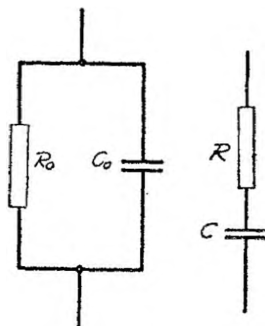
Sl. 8.2.1

Neka su na sl. 8.2.1 $\overline{OA_0}$ i $\overline{OB_0}$ vektori dva paralelna prividna otpora $Z_1$ i $Z_2$. Ako na početku i na kraju tih vektora povučemo na njih vertikale $\overline{OD}$, $\overline{A_0C}$, $\overline{OC}$ i $\overline{B_0D}$ i spojimo secište $C$ i $D$ dveju vertikala, traženi vektor ukupnog otpora $\overline{Z}$ biće jednak vertikali $\overline{OE}$ na $\overline{CD}$, tako da će $\overline{OL}$ i $\overline{LE}$ predstavljati njegovu aktivnu, odnosno reaktivnu komponentu.

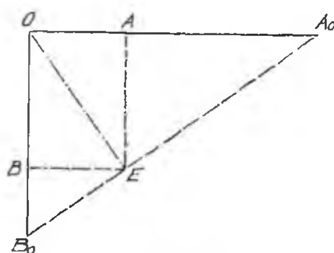
Ako su, specijalno, vektori $\overline{OA_0}$ i $\overline{OB_0}$ međusobno vretikalni (na primer, slučaj kod problema ekvivalencije paralelnog spoja čisto aktivnog otpora $\overline{OA_0}=R_0$ i čistog reaktivnog kapaciteta $\overline{OB_0}=\dfrac{1}{C_0\,\omega}$ (sl. 8.2.2a) ili rednog spoja čistog aktivnog otpora $R$ i čistog kapacitivnog otpora $\dfrac{1}{C\,\omega}$ (sl. 8.2.2b), konstrukcija na sl. 8.2.1 prelazi u pravougli trougao na sl. 8.2.3 sa $\overline{OA_0}$ i $\overline{OB_0}$ kao katetama. Rezultantni (ukupni) otpor $\overline{Z}=\overline{OE}$ dobija se

spuštanjem vertikale iz $O$ na hipotenuzu. Na sl. 8.2.3 $\overline{OA}$ i $\overline{OB}$ su elementi $R$ i $\frac{1}{C\omega}$ — kombinacije date na sl. 8.2.2 s otporom $R$ i kondenzatorom $C$ u rednom spoju.

Već ranije smo na sl. 4.1.2 u primeru 4.1.2.3 pokazali sličnu konstrukciju za slučaj paralelnog spoja dva ili više aktivnih otpora, što može i sada da posluži kod paralelnog spoja istovrsnih otpora.




Sl. 8.2.2




Sl. 8.2.3

### 8.2.2. **Primer**

**1. primer:** Pomoću napred opisanog postupka nađimo struju $I$ iz primera 8.1.2.1 prema sl. 8.1.3 i zadatim vrednostima.

Rešenje: Izračunajmo reaktivne otpore:

$$X_L = \omega L = 2\pi f \cdot L = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 0{,}19 = 60\,\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{10^6}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 50 \cdot 21{,}2} = 150\,\Omega$$

Prvo nacrtajmo otpore prve paralelne grane $R_1 = 80\,\Omega$ i $X_L = 60\,\Omega$ u razmeri $1\,\text{mm} \triangleq 3\,\Omega$ prema sl. 8.2.4. Zatim očitamo $Z_1 = OA_0 \cdot 3 = 33 \cdot 3 = 99\,\Omega$. Sada crtamo otpore druge paralelne grane $R_2 = 260\,\Omega$ i $X_C = 150\,\Omega$ i očitamo $Z_2 = \overline{OB_0} \cdot 3 = 100 \cdot 3 = 300\,\Omega$. Zatim postupamo kako je opisano u poglavlju 8.2.1 i konačno nađemo ukupni otpor paralelnog spoja otpora $Z_1$ i $Z_2$.

On iznosi:

$$Z = OE \cdot 3 = 28 \cdot 3 = 84\ \Omega$$

Uz zadati napon $U = 120$ V ukupna struja u kolu je:

$$I = \frac{120}{84} = 1{,}40\ \text{A}$$

To smo dobili i grafičkim i analitičkim putem, samo sada je mnogo brže i jednostavnije.

Sl. 8.2.4

### 8.2.3. Zadaci za samostalno rešavanje

Ni ovde nećemo dati posebno zadatke za samostalno rešavanje pošto će u poglavlju 8.3.3 biti dovoljno primera za rešavanje.

## 8.3. PRIMENA KOMPLEKSNOG RAČUNA (SIMBOLIČE METODE) U PRORAČUNU KOLA NAIZMENIČNE STRUJE

### 8.3.1. Osnovni pojmovi i formule

Videli smo da se problemi naizmenične struje mogu rešavati vktorskim putem. To zahteva konstrukcije po zakonu paralelograma, koje su izvodljive samo za konkretne slučajeve, a daju rezultate zavisne od tačnosti crtanja, odnosno upućuju na složene računske operacije (treba primenjivati prelaze na aktivne i reaktivne komponente struja ili napona, kosinusnu teoremu i sl.).

Zato je pomoću vektora teško ili nemoguće uopšteno rešavati komplikovanije probleme.

No, postoji vrlo lako metoda tzv. simbolička metoda, kojom je moguće uopšteno i posebno rešavati probleme naizmenične struje nezavisno od vektorskih slika i njihovih nedostataka.

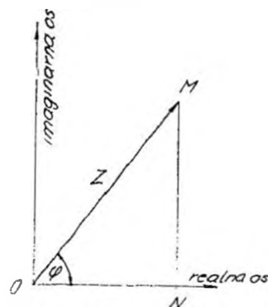
Bitna prednost ove metode je u tome da se rezultati izvedeni za neizmenične struje formalno potpuno podudaraju s analognim rezultatima za jednosmerne struje, tako da se, i obrnuto, cela razmatranja izvedena za jednosmerne struje mogu bez daljeg upotrebiti za odgovarajuće probleme naizmeničnih struja.

Ova metoda zasniva se na predočavanju naizmeničnih veličina kompleksnim brojevima. Oni su za korak više simbolični od vektorskog predočavanja, odakle i ime »simbolička metoda« za ovaj postupak. Kako je poznato, po Gausu se svaki kompleksni broj $R+jX$ (uz $j=\sqrt{-1}$), s realnim delom $R$ i imaginarnim $jX$, može predočiti (sl. 8.1.3) u pravouglom koordinatnom sistemu tačkom $M$ s apcisom $\overline{ON}=R$ i ordinatom $\overline{NM}=X$. Mesto veličinama $R$ i $X$ određen je broj $R+jX$ takođe i veličinama $Z$ i $\varphi$, dakle »polarnim koordinatama«. $Z$ se zove modul (»apsolutni iznos«), a $\varphi$ argument kompleksnog broja.

Između $Z$ i $\varphi$ i $R$ i $X$ postoje relacije:

$$R=Z\cos\varphi$$
$$X=Z\sin\varphi \qquad (8.3.1)$$
$$Z=\sqrt{R^2+X^2}$$

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{X}{R}\left(\varphi=\operatorname{arctg}\frac{X}{R}\right) \qquad (8.3.2)$$



Sl. 8.3.1

Tako se dobija u matematici poznati izraz:

$$\cos\varphi + j\sin\varphi = e^{j\varphi} \tag{8.3.3}$$

Ovde je $e$ baza prirodnih logaritama, a $\varphi$ ugao u radijanima. Uvodeći u ovom delu za izraz $e^{j\varphi}$ za pisanje jednostavnije i tipografski jednostavniju kraticu $\|\varphi\|$ (sa $\varphi$ u radijanima ili stepenima) dobijemo:

$$R + jX = Z(\cos\varphi + j\sin\varphi) = Z \cdot e^{j\varphi} = Z\,\|\varphi\| \tag{8.3.4}$$

Znači, svakom kompleksnom broju $R+jX$ odgovara neki, po vrednosti i smeru, tačno određeni vektor $\bar{Z}$. Taj vektor možemo smatrati predstavnikom broja $R+jX = Z \cdot e^{j\varphi} = Z\,\|\varphi\|$.

Ali, i obrnuto: ako nam je vektor zadat uvek ga možemo predstavljati nekim određenim kompleksnim brojem koji njemu odgovara. Prema tome, svakom odnosu između vektora mora odgovarati sasvim određen odnos između njihovih predstavnika kompleksnih veličina, i obrnuto, ako utvrdimo neki odnos između kompleksnih veličina. To će značiti i sasvim određen odnos između vektora, odnosno, ako vektori predočuju naizmenične veličine i izvestan odnos između tih naizmeničnih veličina. Ako samo, dakle, dosad umesto da neposredno proučavamo odnose među naizmeničnim veličinama, proučavali, kao preglednije, odnose među pripadnim vektorima, moći ćemo odsad, ako se to pokaže još prikladnijim, proučavati te odnose na kompleksnim brojevima kao predstavnicima tih vektora. Dobijene rezultate treba preneti na naizmenične veličine, koje su stvarno jedini objekt proučavanja.

To bi bila suština simboličke metode.

Sigurno je da za njemu praktičnu primenu treba znati raditi s kompleksnim brojevima. Tako na primer, praktički je važno znati brzo prelaziti s jednog oblika kompleksnog broja $(R+Xj)$ na drugi $(Z\,\|\varphi\|)$.

Kod toga prelaza $R+jX \rightleftarrows Z\,\|\varphi\|$ služe nam formule 8.3.1 i 8.3.2. Tako npr. $8{,}24 + j\,4.20 = 9{,}20\,\|27{,}0^\circ\|$ primenom formule 8.3.2 prelazi u $9{,}25\,\|27{,}0^\circ\| = 8{,}24 + j\,4{,}20$.

Za ova pretvaranja upotrebljiva su obična »logaritamska« a pogotovu specijalna računala.

Za primer opišimo postupak kod pretvaranja $R+jX \rightleftarrows Z\,\|\varphi\|$ kod vrlo upotrebljivog računala tipa »Darmstadt«.

Neka je dato:

$R+Xj=8{,}24+j\,4{,}20$, gde su $R$ i $X$ pozitivni.

Pomicanjem jezička stavi se 8,24 na C-skali iznad 10 na D-skali. Pomicanjem kazaljke crta se na njoj dovede nad 4,20 na C-skali. Zatim pod crtom na T-skali očitamo iznos $a=27{,}0°$. Ovde je on jednak traženom argumenta $\varphi$. Da bi se još dobio $\overline{Z}$, pomakne se kazaljka da crta padne nad $a=27{,}0°$ S-skale, a zatim se jezik postavi tako da pod crtu u novom poglavlju dođe 4,20 C-skale. Nad 10 D-skale stoji onda na C-skali $\overline{Z}=9{,}25$. Kod nešto drukčijih slučajeva, na primer kod $130-j\,60$, počnemo tim da se 130 C-skale stave nad 1 (ne nad 10) D-skale itd.

Dalje, upoznajmo se sa računskim operacijama kompleksnih veličina. Sabiranje i oduzimanje veličina oblika $R_1+jX_1$ i $R_2+jX_2$ (veličine zadate u drugom obliku najpre bi se pretvorile u taj oblik) ne predstavlja nikakvu teškoću. Izlazi za sumu, odnosno razliku da je:

$$(R_1 \pm R_2)+j\,(X_2 \pm X_2) \qquad (8.3.5)$$

To znači da se posebno sabiraju ili oduzimaju realni i posebno imaginarni delovi. Kod množenja kompleksnih veličina $\overline{Z}_1$ i $\overline{Z}_2$ zadatih u prvom obliku, na primer $\overline{Z}_1=a+jb$ i $\overline{Z}_2=c+jd$, umnožak $\overline{Z}=\overline{Z}_1\cdot\overline{Z}_2$ se može računati po pravilu za množenje binoma binomom, no pazeći na to da je $j^2=-1$. Tako se dobija da je:

$$(a+jb)\,(c+jd)=(ac-bd)+j\,(bc+ad)$$

Ovaj rezultat nije pregledan. No, pretvorimo li faktore u oblike $Z_1\cdot e^{j\varphi_1}=Z_1\,||\,\varphi_1\,||$ i $Z_2\cdot e^{j\varphi_2}=Z_2\,||\,\varphi_2\,||$ dobićemo znatno pregledniji izraz za produkt $\overline{Z}=Z\cdot e^{j\varphi}=Z\,||\,\varphi\,||$:

$$\overline{Z}=Z\,||\,\varphi\,||=\overline{Z}_1\cdot\overline{Z}_2=Z_1||\varphi_1||Z_2||\varphi_2||=Z_1\,Z_2||\varphi_1+\varphi_2|| \qquad (8.3.6)$$

Vidimo da se proizvod dve kompleksne veličine može izračunati tako da se moduli pomnože i argumenti saberu.

Da izvedemo deljenje veličine $\overline{Z}_1$ veličinom $\overline{Z}_2$ mogli bismo kod tih veličina, zadatih u prvom obliku, postupiti tako da kvocijent pisan u obliku razlomka $\frac{a+jb}{c+jd}$ proširimo konjugovano komplek-

snim brojem $c-jd$ nazivnika i time nazivnik razlomka učinimo realnim tj.:

$$\frac{a+jb}{c+jd}=\frac{(a+jb)\cdot(c-jd)}{(c+jd)\cdot(c-jd)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+j\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

I ovde rezultat postaje pregledniji, pri upotrebi drugoga oblika kompleksnih veličina. U tom slučaju dobijemo:

$$\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}=\frac{Z_1 e^{j\varphi_1}}{Z_2 e^{j\varphi_2}}=\frac{Z_1 \| \varphi_1 \|}{Z_2 \| \varphi_2 \|}=\frac{Z_1}{Z_2} e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}=\frac{Z_1}{Z_2} \| \varphi_2-\varphi_2 \| \qquad (8.3.8)$$

To znači da se kvocijent dveju kompleksnih veličina dobija tako da im se moduli podele i argumenti odbiju.

Velika je prednost simboličkog rešavanja naizmeničnih problema, tako da su formule za naizmenične struje u istom obliku kao analogne formule kod jednosmernih problema.

Tako napisana formula $\bar{U}=\bar{I}\cdot\bar{Z}$ potpuno odgovara formuli $U=I\cdot R$ Omovog zakona za jednosmerne struje, samo s razlikom da umesto jednosmernog napona i jednosmerne struje $U$ i $I$ dolazi sada $\bar{U}$ i $\bar{I}$, a umesto $R$ dolazi kod naizmeničnih struja kompleksni otpor $\bar{Z}$.

Za oba Kirhofova zakona imamo u simboličkoj metodi formalno jednake relacije:

$$\Sigma \bar{I}=0, \quad \Sigma \bar{U}=\Sigma \bar{I}\cdot\bar{Z} \qquad (8.3.9)$$

Slično bi bilo i za formule za pretvaranje trougla u zvezdu i obrnuto; samo stavljali bismo svuda $\bar{Z}$ veličine umesto $R$ veličina. Kao dalju primenu simboličke metode rešimo probleme rednih i paralelnih spojeva.

Za redni spoj na sl. 7.7.4 može se uz struju $\bar{I}=I$ uzeti realnom i postaviti relacija:

$$\bar{U}=\bar{U}_1+\bar{U}_2=I\cdot\bar{Z}_1+I\cdot\bar{Z}_2+\cdots=I[(R_1+R_2+\cdots)+$$
$$+j(X_1+X_2+\cdots)]$$

iz koje se odmah vidi da se aktivni otpor posebno i reaktivni posebno sabiraju u rezultantni aktivni otpor $R$ i reaktivni otpor $X$ koji zajedno daju ukupni prividni otpor:

$$\bar{Z}=R+jX \qquad (8.3.10)$$

Kod paralelnog spoja po sl. 8.1.1 pisali bismo $\bar{U}=U$ realno, simbolički:

$$\bar{I}=\bar{I}_1+\bar{I}_2=\frac{\bar{U}}{\bar{Z}_1}+\frac{\bar{U}}{\bar{Z}_2}=\bar{U}\left(\frac{1}{\bar{Z}_1}+\frac{1}{\bar{Z}_2}\right) \qquad (8.3.11)$$

Možemo raditi po formuli, što je prikladnije:

$$\bar{Z}=\frac{\bar{Z}_1\cdot\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1+\bar{Z}_2}$$

da izračunavamo najpre ukupni otpor $\bar{Z}$ dve paralelne grane. Struju $\bar{I}$ treba računati po relaciji:

$$\bar{I}=\frac{\bar{U}}{\bar{Z}}$$

U simboličkoj metodi ne smemo snagu $S$ računati kao $\bar{I}\cdot\bar{U}$. To je jedina iznimka prema izrazu $P=U\cdot I$ kod jednosmernih struja. Izraz $P=U\cdot I\cdot\cos\varphi$ se dobija množenjem jedne od veličina $\bar{U}$ ili $\bar{I}$ s konjugovano kompleksnom veličinom $I^k$ ili $U^k$ druge veličine $\bar{I}$ ili $\bar{U}$.

Ako treba izračunati kompleksnom otporu $\bar{Z}=R+jX$ pripadnu kompleksnu provodnost u obliku: $\bar{Y}=G-jB=\frac{1}{\bar{Z}}$, ne sme se staviti prosto $\frac{1}{R}$ za $G$ i $\frac{1}{X}$ za $B$, nego se mora računati na sledeći način:

$$\bar{Y}=\frac{1}{\bar{Z}}=\frac{1}{R+jX}=\frac{R-jX}{(R+jX)(R-jX)}=\frac{R}{R^2+X^2}-j\frac{X}{R^2+X^2}\ [\text{S}]$$

Iz toga slede relacije:

$$G=\frac{R}{R^2+X^2}\ [\text{S}] \qquad (8.3.12)$$

$$B=\frac{X}{R^2+X^2}\ [\text{S}] \qquad (8.3.13)$$

### 8.3.2. Primer

**1. primer:** Simboličkom metodom izračunati sve struje na sl. 8.1.3 pri istim parametrima.

Rešenje: Kako su nam već poznate vrednosti $R_1$, $R_2$, $X_L$ i $X_C$ (primer 8.1.2.1) napišemo kompleksne otpore grana *ABC* i *ADC* (sl. 8.1.3):

$$\bar{Z}_1 = R_1 + jX_L = (80 + j\,60) = 100 \,\|\, 37^\circ \,\|\, [\Omega]$$

$$\bar{Z}_2 = R_2 - jX_C = (260 - j\,150) = 300 \,\|\, -30^\circ \,\|\, [\Omega]$$

Ukupni kompleksni otpor je:

$$\bar{Z} = \frac{\bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} = \frac{100 \,\|\, 37^\circ \,\| \cdot 300 - 30^\circ \,\|}{80 + j\,60 + 260 - j\,150} = \frac{30000 \,\|\, 7^\circ \,\|}{340 - j\,90} =$$

$$= \frac{3000 \,\|\, 7^\circ \,\|}{34 - j\,9} = \frac{3000 \,\|\, 7^\circ \,\|}{35{,}2 \,\|\, -14^\circ\, 40' \,\|} = 86 \,\|\, 21^\circ\, 40' \,\|\, [\Omega]$$

Isti rezultat dobije se grafičkim putem kao što je prikazano na sl. 8.3.2.

Vektor zadatog napona na stezaljkama kola postavljamo u $x$ osu (paralelan spoj).

Tada je kompleksni napon $\bar{U} = U = 120\ \text{V}$

Ukupna kompleksna struja je:

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}} = \frac{120}{86 \,\|\, 21^\circ\, 40' \,\|} = 1{,}4 - 21^\circ\, 40' \,\|\, [\text{A}]$$

Kompleksne struje grana iznose:

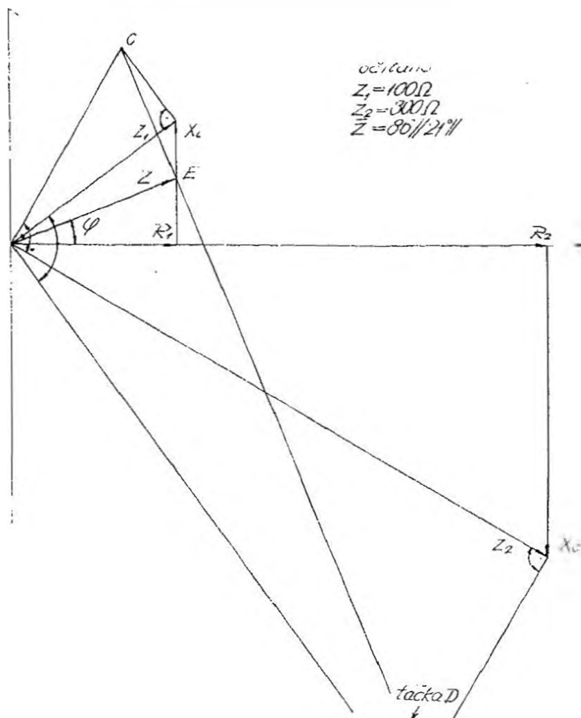
$$\bar{I}_1 = \frac{120}{\bar{Z}_1} = \frac{120}{100 \,\|\, 37^\circ \,\|} = 1{,}2 \,\|\, -37^\circ \,\|\, [\text{A}]$$

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}}{\bar{Z}_2} = \frac{120}{300 \,\|\, -30^\circ \,\|} = 0{,}4 \,\|\, 30^\circ \,\|\, [\text{A}]$$

Kako ćemo proveriti rezultat? Primenom kompleksnog računa na kola naizmenične struje, tako da proveru možemo izvršiti pomoću prvog Kirhofovog zakona:

$$\bar{I}_1 = 1{,}2 \,||-37°|| = 1{,}2\,(\cos 37° - j\sin 37°) = (0{,}96 - j\,0{,}72) \quad [A]$$

$$\bar{I}_2 = 0{,}4 \,||\, 30°\,|| = 0{,}4\,(\cos 30° + j\sin 30°) = (0{,}35 + j\,0{,}2) \quad [A]$$




Sl. 8.3.2

a njihova suma je:

$$\bar{I}_1 + \bar{I}_2 = 0{,}96 - j\,0{,}72 + 0{,}35 + j\,0{,}2 = 1{,}31 - j\,0{,}52 =$$

$$= 1{,}4 \,||\, 21°\,40'\,||\, [A]$$

Izračunajmo još napon $U_{BD}$. Za konturu *ABDA* (sl. 8.1.3) prema drugom Kirhofovom zakonu imamo:

$$\bar{I} \cdot R_1 + \bar{U}_{BD} - \bar{I}_2 \cdot R_2 = 0$$

odakle je:

$$\bar{U}_{DB} = \bar{I}_2 R_2 - \bar{I}_1 \cdot R_1 = 0{,}4 \,\|\, 30° \,\| \cdot 260 - 1{,}2 \,\|\, -37° \,\| \cdot 80 =$$

$$= 104 (\cos 36° + j \sin 30°) - 96 (\cos 37° - j \sin 37°) =$$

$$= 13{,}2 + j\, 109{,}6 = 112 \,\|\, 83°\, 10' \,\|\, [\mathrm{V}]$$

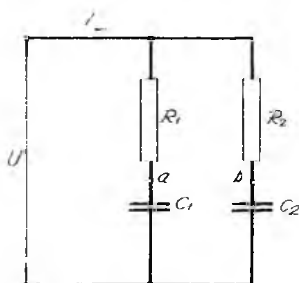
### 8.3.3. Zadaci za samostalno rešavanje

1. Kolo paralelnog spoja aktivnog otpora $R = 440\,\Omega$ i induktiviteta $L = 1{,}4\,H$ napaja se iz mreže naizmenične sruje napona 220 V i frekvencije $f = 50$ Hz. Izračunati struje u granama i ukupnu struju, a takođe aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu.

2. Aktivni otpor $R = 440\,\Omega$, induktivitet $L = 0{,}35$ H i kapacitet $C = 2{,}86\,\mu$F spojeni su paralelno na izvor naizmenične struje, napona 220 V i frekvencije $f = 200$ Hz. Odrediti struje u granama i ukupnu struju u kolu. Nacrtati vektorski dijagram struja.

3. Svitak s parametrima $R_s = 60\,\Omega$ i $L_s = 33{,}4$ mH i paralelno spojenim reostatom otpora $R = 500\,\Omega$ napaja se iz izvora naizmenične struje napona 100 V i frekvencije $f = 400$ Hz. Izračunati struju grana i struju izvora.

4. Izvor naizmenične struje napona $U = 120$ V napaja kolo od dve paralelne grane: prva ima aktivni i kapacitivni otpor $R = X_C = 10\,\Omega$, druga ima induktivni otpor $X_L = 10\,\Omega$. Odrediti sve struje u kolu. Nacrtati vektorski dijagram struja.



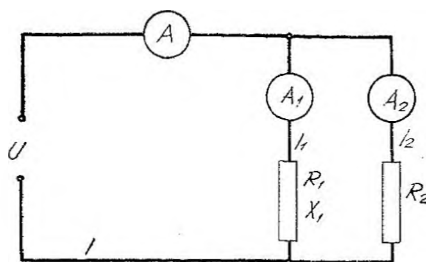
Sl. 8.3.3

5. Parametri kola (sl. 8.3.3) su poznati: $R_1 = 542\,\Omega$, $R_2 = 416\,\Omega$, $C_1 = 0{,}51\,\mu$F, $C_2 = 0{,}22\,\mu$F, $U = 10$ V i f = 1000 Hz. Odrediti ukupnu struju I, padove napona na aktivnim otporima, a takođe napon između tačaka *a* i *b*. Nacrtati dijagram struja.

6. Za paralelno kolo aktivnog otpora $R$ i induktivnog $X_L$ naći odnos $\frac{R}{X_1}$ pri kojem je $\frac{P}{Q} = 3/4$, gde su $P$ i $Q$ odgovarajuće aktivne i reaktivne snage celog kola.

7. Ampermetri. uključeni u kolo (sl. 8.3.4) pokazali su struju: $I = 16{,}1$ A, $I_1 = 8{,}93$ A, $I_2 = 10$ A. Odrediti snagu potrošača $P_1$, njegov faktor snage i njegove parametre $R_1$ i $X_1$ ako je $R_2 = 20\ \Omega$.

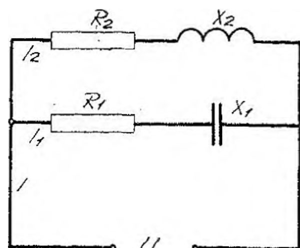
8. Asinhroni motor uzima iz mreže struju $I = 20$ A pri $\cos\varphi_1 = 0{,}8$ ($\varphi_1 > 0$). Paralelno s motorom uključen je kondenzator, kroz koji protiče struja $I_2 = 10$ A. Odrediti (grafički i analitički) struje $I$ u nerazgranatom delu kola i $\cos\varphi$ celog kola.



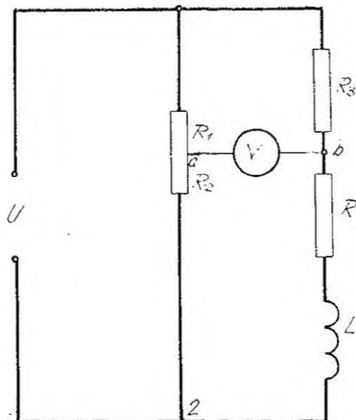
Sl. 8.3.4

9. Odrediti prividni otpor $Z$ i $\cos\varphi$ kola, prikazanog na sl. 8.3.5, ako je $R_1 = 8\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $X_1 = -6\ \Omega$. $X_2 = 4\ \Omega$. Izračunati struje $I_1$, $I_2$, $I$ i snagu $P$ pri $U = 200$ V. Nacrtati dijagram struja.

10. Jedan od dva spojena potrošača ima snagu $P_1 = 500$ W. Struja u drugom potrošaču je $I_2 = 10$ A pri $\cos\varphi_2 = 0{,}8$ ($\varphi_2 > 0$). Struja u nerazgranatom kolu je: $I = 16$ A i $\cos\varphi = 0{,}9$ ($\varphi > 0$). Odrediti vrednost napona izvora kola, struju $I_1$ i $\cos\varphi_1$ prvog potrošača.



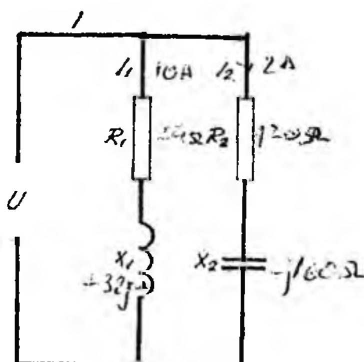
Sl. 8.3.5



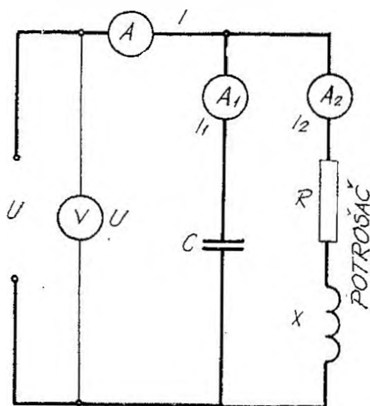
Sl. 8.3.6

11. U kolu (sl. 8.3.6) sastavljenom za određivanje parametara svitka $R$ i $L$, voltmetar je pokazao minimalnu vrednost napona između tačaka $a$ i $b$, $U_{ab\min} = 30$ V, čemu odgovara $R_1 = 5\ \Omega$ i $R_2 = 15\ \Omega$, pri naponu izvora $U = 100$ V, frekvenciji $f = 50$ Hz i $R_3 = 6{,}5\ \Omega$. Izračunati $R$ i $L$ svitka. Struju kroz voltmetar zanemariti.

12. Dato je kolo (sl. 8.3.7): $U = 400$ V, $f = 5$ kHz, snaga potrebna prvoj grani $P_1 = 2{,}4$ kW, faktori snage prve i druge grane $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 = 0{,}6$, $I = 12$ A. Odrediti parametre grana kola.



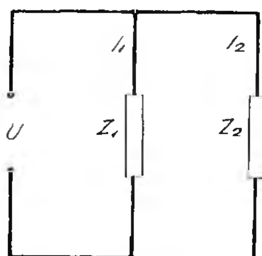
Sl. 8.3.7



Sl. 8.3.8

13. Instrumenti uključeni u kolo (sl. 8.3.8) pokazali su: $U = 200$ V, $I = 37{,}9$ A, $I_1 = I_2 = 20$ A. Koliki su snaga potrošača i otpor potrošača $R$ i $X_L$?

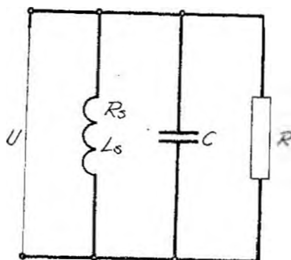
14. U kolu (sl. 8.3.9) napon izvora je $U = 50$ V. Struje $I = I_1 = I_2 = 5$ A, $\varphi_1 = 90°$. Koliki su $Z_1$ i $Z_2$?



Sl. 8.3.9

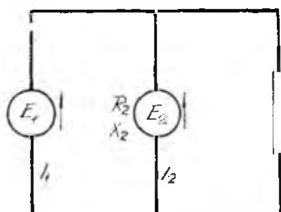
15. Odrediti ukupnu struju u kolu od tri paralelne grane: prva grana sadrži jedan induktivni svitak $L_1 = 80$ mh, druga redno spojen induktivitet $L_2 = 50$ mH i kapacitet $C = 40\,\mu$F, treća grana otpor $R_r = 100\,\Omega$. Struja u prvoj grani je 5 A, a frekvencija $f = 50$ Hz.

16. Za kolo (sl. 8.3.10) poznat je napon $U = 120$ V, induktivni otpor $X_s = 8\,\Omega$, aktivni otpor svitka $R_s = 6\,\Omega$ i kapacitivni otpor $X_C = 25\,\Omega$. Izračunati struje grana i ukupnu struju, ako je aktivna snaga celog kola 1584 W.

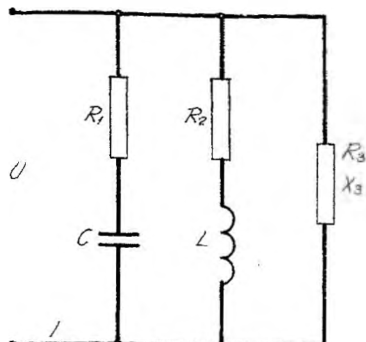


Sl. 8.3.10

17. Dva paralelna generatora napajaju potrošač (sl. 8.3.11) parametara $R_0 = 3\,\Omega$, i $X_0 = 4\,\Omega$. Struje u kolu iznose: $I_1 = 60$ A, $I_2 = 50$ A, $I_0 = 100$ A. Struja $I_2$ zaostaje u fazi iza struje $I_0$. Unutrašnji otpor generatora iznosi: $R_1 = R_2 = 1\,\Omega$, $X_1 = X_2 = 2\,\Omega$. Odrediti ems $E_1$ i $E_2$ generatora i razliku ugla $\theta$ između njih, stepen iskorišćenja svakog generatora $\eta_1$ i $\eta_2$ i celog kola $\eta$.



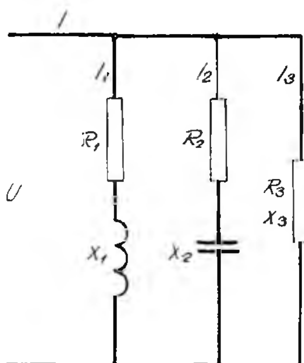
Sl. 8.3.11



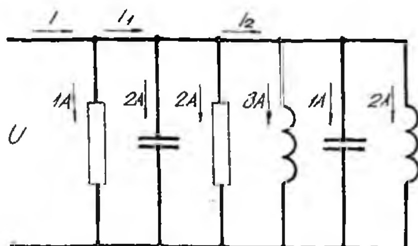
Sl. 8.3.12

18. Parametri kola (sl. 8.3.12) iznose: $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$ $L = 64$ mH, $C = 318\,\mu$F. Napon $U = 100$ V i $f = 50$ Hz. Odrediti vrednosti otpora $R_3$ i $X_2$, pri kojima je struja $I = 10$ A, a da $\cos\varphi$ celog kola ima pri tome minimalnu moguću vrednost.

19. U kolu (sl. 8.3.13) je $U = 10$ V, $I = 2{,}6$ A, $\varphi = 35°$, $\bar{Z}_1 = 3 + j4$ i $\bar{Z}_2 = 10e^{-j37°}$. Koliko je $\bar{Z}_3$?



Sl. 8.3.13



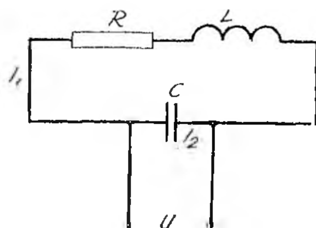

Sl. 8.3.14

20. Na sl. 8.3.14 date su efektivne vrednosti struje u granama, kola pri nekoj frekvenciji $\omega$ napona izvora. Odrediti: 1) $I_2$, $I_1$, $I$; 2) $I_2$, $I_1$, $I$, ako se frekvencija izvora poveća za dva puta (a), odnosno smanji za tri puta (b).

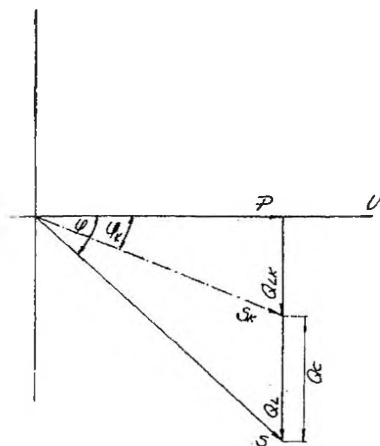
## 8.4. POPRAVLJANJE FAKTORA SNAGE

### 8.4.1. **Osnovni pojmovi i formule**

Većina naizmeničnih kola jake struje imaju induktivni karakter, jer redovno sadrže induktivitete u obliku raznih svitaka. Takvi potrošači su električni motori, elektromagneti za razne namene, prigušnice i slično. Kako spomenuti potrošači poseduju uz to još izvestan aktivni otpor, to struja u takvim kolima zaostaje za naponom za ugao $\varphi$. Taj ugao, odnosno fazni pomak, uzrok je smanjenja radne snage $P$ u odnosu na prividnu snagu $S$ i potrebno je da taj pomak bude što manji. S druge strane, uticaj kondenzatora je upravo suprotan uticaju svitka. Kondenzator uzima iz mreže reaktivnu kapacitivnu struju (snagu) $I_C$ koja prethodi naponu izvora za 90°, a svitak uzima reaktivnu induktivnu struju (snagu) $I_L$ koja za istim naponom zaostaje za 90°. Prema tome, te su dve struje (snage) u protivfazi. Na temelju te činjenice upravo se nameće odgovor na pitanje: kako bi se nepoželjna reaktivna struja (snaga) induktiviteta mogla kompenzirati, a da se to nepovoljno ne odrazi na vrednost potrebne aktivne struje (snage). Rešenje se sastoji u tome da paralelno s induktivitetom priključimo kondenzator tolikog kapaciteta da njegova reaktivna struja (snaga) poništi željeni deo reaktivne struje (snage) induktiviteta, kako je to prikazano na sl. 8.4.1 i 8.4.2.




Sl. 8.4.1




Sl. 8.4.2

Prema sl. 8.4.2 imamo:

— faktor snage pre kompenzacije je:

$$\cos\varphi = \frac{P}{S} \quad (8.4.1)$$

— jalova snaga (induktivna) iznosi:

$$Q_L = S\sin\varphi = \sqrt{S^2 - P^2}\ [\mathrm{VAr}] \quad (8.4.2)$$

— faktor snage nakon kompenzacije je:

$$\cos\varphi_k = \frac{P}{S_k} \quad (8.4.3)$$

gde je:

$S_k$ [VA] — prividna snaga spoja nakon kompenzacije.

Da bi se faktor snage povećao od vrednosti $\cos\varphi$ na vrednost $\cos\varphi_k$, potrebna je reaktivna snaga kondenzatora.

$$Q_C = S\sin\varphi - S_k\sin\varphi_k\ [\mathrm{VAr}] \quad (8.4.4)$$

S druge strane je:

$$Q_C = U\cdot I_C\ [\mathrm{VAr}] \quad (8.4.5)$$

gde su:

$I_C$ [A] — struja kondenzatora,

$U$ [V] — napon izvora.

Iz poslednjeg izraza određujemo struju kondenzatora:

$$I_C = \frac{Q_C}{U}\ [\mathrm{A}]$$

Prema Omovom zakonu je:

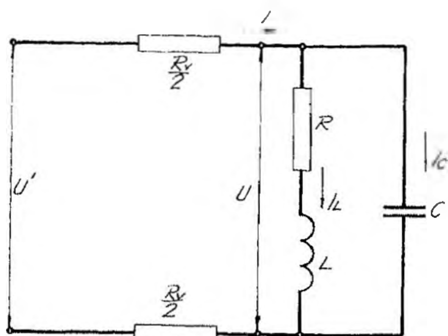
$$U = I_C\cdot X_C = I_C\frac{1}{\omega C}\ [\mathrm{V}] \quad (8.4.6)$$

Iz poslednjeg izraza traženi kapacitet $C$ iznosi:

$$C = \frac{I_C}{U\cdot\omega}\ [\mathrm{F}] \quad (8.4.7)$$

### 8.4.2. Primeri

**1. primer:** U proizvodnom objektu u kojem rade električni motor ukupne snage $P = 45{,}6\,kW$ pri naponu $U = 380\,V$ i frekvenciji $f = 50\,Hz$ dovodi se električna energija preko jednofaznog voda s aktivnim otporom $R_v = 0{,}05\,\Omega$. Za popravljanje faktora snage od vrednosti $\cos\varphi = 0{,}6$ do vrednosti $\cos\varphi_k = 0{,}95$ paralelno je vezana kondenzatorska baterija (napon U ostaje konstantan). Izračunati kapacitet kondenzatorske baterije i gubitke snage u provodnicima. Ekvivalentna šema motora i paralelno spojenog kondenzatora data je na sl. 8.4.3.




Sl. 8.4.3

R e š e n j e: Prividna snaga pre kompenzacije je:

$$S = \frac{P}{\cos\varphi} = \frac{45{,}6 \cdot 10^3}{0{,}6} = 76{,}0\ kVA$$

Reaktivna snaga pre kompenzacije je:

$$Q_L = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{76{,}0^2 - 45{,}6^2} = 61{,}0\ kVAr$$

Reaktivna snaga posle kompenzacije iznosi:

$$S_k = \frac{P}{\cos\varphi_k} = 48{,}0\ kVA.$$

Prividna snaga posle kompenzacije je:

$$Q_{Lk} = \sqrt{S_k^2 - P^2} = \sqrt{48^2 - 45{,}6^2} = 14{,}8\ kVAr$$

Potrebna snaga kompenzacionog kondenzatora je:

$$Q_C = S \sin\varphi - S_k \sin\varphi_k = Q_L - Q_{Lk} = 61{,}0 - 14{,}8 = 46{,}2\ kVAr$$

Struja kondenzatora je:

$$I_C = \frac{Q_C}{U} = \frac{46{,}2 \cdot 10^3}{380} = 121\ A$$

a traženi kapacitet:

$$C = \frac{I_C}{U \cdot \omega} = \frac{I_C}{U \cdot 2\pi f} = \frac{121 \cdot 10^{-6}}{380 \cdot 2\pi 50} = 1010\,\mu F$$

Da bismo izračunali gubitke snage u provodnicima, izračunaćemo struje. Pre uključenja kondenzatora ukupna struja bila je:

$$I = \frac{S}{U} = \frac{76 \cdot 10^3}{380} = 200\text{ A}$$

Posle uključenja kondenzatora ukupna struja iznosi:

$$I_k = \frac{S_k}{U} = \frac{48 \cdot 10^3}{380} = 126\text{ A}$$

Pre popravljanja faktora snage, gubici u provodnicima bili su: $\Delta P = I^2 \cdot R_v = 200^2 \cdot 0{,}05 = 2000\text{ W} = 2\text{ kW}$, odnosno procentualno:

$$\frac{\Delta P}{P} \cdot 100 = \frac{2}{45{,}6} \cdot 100 = 4{,}4\%$$ od aktivne snage opterećenja.

Posle uključenja kondenzatora snaga gubitaka se smanjuje proporcionalno kvadratu odnosa struja $\frac{I_k^2}{I^2} = \frac{126^2}{200^2} = 0{,}63^2 = 0{,}397$ i iznose:

$$\Delta P_k = 2 \cdot 0{,}397 = 0{,}794\text{ kW}$$

ili $4{,}4 \cdot 0{,}397 = 1{,}74\%$ aktivne snage opterećenja.

### 8.4.3. **Zadaci za samostalno rešavanje**

1. Motor naizmenične struje snage $P = 600$ W uključen je u mrežu naizmenične struje napona $U = 220$ V i frekvencije $f = 50$ Hz. Motor radi sa faktorom snage $\cos\varphi_1 = = 0{,}77$. Koliki je kapacitet C kondenzatora, koji treba paralelno uključiti s motorom da bi se faktor snage motora povećao na vrednost $\cos\varphi_2 = 0{,}93$?

2. Proizvodni objekt čija aktivna snaga električnog postrojenja iznosi $P = 250$ kW, napaja se iz generatora napona $U = 500$ V i frekvencije $f = 50$ Hz. Koliki je kapacitet kondenzatorske baterije, montirane u objektu, potreban za povećanje $\cos\varphi$ od 0,7 do 0,9? Koliki je deo kondenzatorske baterije potrebno isključiti, ako se snaga objekta smanji za dva puta?

3. Za uslove iz 2. zadatka odrediti nominalnu prividnu snagu i nominalnu struju generatora pre i posle popravke $\cos\varphi$ objekta.

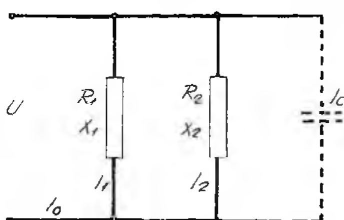
4. U mreži naizmenične struje napona $U = 6$ kV spojen je potrošač energije snage $P = 10$ kW i faktora snage $\cos\varphi = 0{,}85$. Kolika je struja potrošača, ako paralelno njemu priključimo kondenzator kapaciteta $C = 0{,}5\ \mu$F?

5. Za dobijanje $\cos\varphi_2 = 1$ paralelno elektromotoru uključen je kondenzator. Naći kapacitet $C$ kondenzatora, ako je bez njega faktor snage $\cos\varphi_1 = 0{,}75$ pri frekvenciji $f = 50$ Hz. Aktivni otpor namotaja statora električnog motora je $R = 0{,}832\ \Omega$.

6. Na izvor naizmenične struje s frekvencijom $f = 50$ Hz spojene su dve paralelne grane: Prva sadrži aktivni otpor $R = 2\ \Omega$ i induktivitet $L$, a druga samo kapacitet $C$. Faktor snage prve grane je 0,707 a celog kola 0,9. Odrediti $L$ i $C$.

7. Za povećanje faktora snage $\cos\varphi$ motora do 0,87 na njegove stezaljke spojen je kondenzator kapaciteta $C = 800\ \mu$F. Koliki je faktor snage motora bez kondenzatora, ako on radi pri naponu $U = 500$ V, frekvenciji 50 Hz i ima aktivnu snagu 110 kW?

8. U kolo su uključena dva potrošača (sl. 8.4.4). Prvi ima otpor $R_1 = 8\ \Omega$ i $X_1 = 10\ \Omega$, a struja u njemu je $I_1 = 15$ A. Faktor snage drugog potrošača je $\cos\varphi_2 = 0{,}7$ ($\varphi_2 > 0$), a potrebna snaga $P_2 = 500$ W. Naći struju $I_0$ u nerazgranatom delu kola, snagu $P_0$ i faktor snage $\cos\varphi_0$ celog kola. Kolika je struja $I_C$ u kondenzatoru, priključenom paralelno na razmatrano kolo, pri popravku faktora snage $\cos\varphi$ do vrednosti jedinice?



Sl. 8.4.4

9. Za koliki kapacitet i koliku prividnu snagu treba dimenzionirati kondenzator koji bi pri frekvenciji mreže 50 Hz bio priključen paralelno potrošaču i za 1100 V, 20 A i 13,2 kW kompenzirao reaktivnu induktivnu struju toga potrošača?

10. Proračunati kondenzator koji, sastavjien na mesto onoga iz 9. zadatka, treba da popravi $\cos\varphi$ na 0,9.

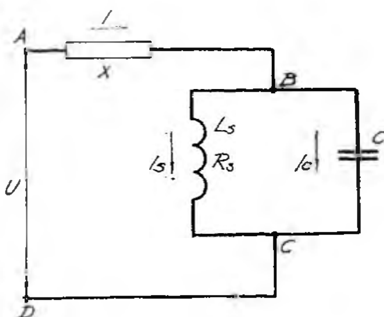
## 8.5. MEŠOVITA VEZA U KOLU NAIZMENIČNE STRUJE

### 8.5.1. Osnovni pojmovi i formule

Dok je kod jednosmerne struje rešavanje mešovite veze relativno prosto, ova veza u kolu naizmenične struje predstavlja prilično komplikovan problem. Ipak poznavanje simboličkog računa i drugog što smo do sada naučili olakšaće nam da taj problem rešimo.

### 8.5.2. Primeri

**1. primer:** Odrediti vrednost i karakter (induktivni ili kapacitivni) reaktivnog otpora $X$ kojeg treba uključiti u granu $AB$ (sl. 8.5.1), da bi celo kolo bilo u režimu naponske rezonanse pri frekvenciji 400 Hz. Izračunati iz tih uslova napona na stezaljkama $U$, tako da struja kondenzatora bude $I_C = 0{,}1$ A, ako je $L_s = 50$ mH, $R_s = 25\,\Omega$ i $C = 0{,}8\,\mu$F.



Sl. 8.5.1

R e š e n j e: Da bi zadovoljili uslove zadatka treba uspostaviti kolo od redno uključenog induktiviteta i kapaciteta i ispuniti uslov $X_L = X_C$. Zato prvo odredimo otpor dela $BC$.

Kompleksni otpor svitka je:

$$\overline{Z}_s = R_s + jX_s = 2{,}5 + j\,2\pi \cdot 400 \cdot 0{,}05 = 25 + j\,125 =$$

$$= 127{,}5\ |\underline{78^\circ\, 40'}\ [\Omega]$$

Reaktivni otpor kapaciteta je:

$$X_c' = \frac{1}{2\cdot\pi\cdot f\cdot C} = \frac{10^6}{2\cdot\pi\cdot 400\cdot 0{,}8} = 500\,\Omega$$

Kompleksni otpor dela *BC* iznosi:

$$Z_{BC} = \frac{Z_s(-jX_C')}{Z_s - jX_c'} = \frac{12{,}5\,\|78°\,40'\|\cdot 500\,\|-90°\|}{25+j\,125-j\,500} =$$

$$= \frac{63\cdot 750\,\|-11°\,20'\|}{376\,\|-86°\,30'\|} = 170\,\|75°\,10'\| = (44{,}3+j\,164)[\Omega]$$

Na taj način deo *BC* (sl. 8.5.1) može biti predstavljen rednim spojem aktivnog otpora 44,3 Ω (realni deo $Z_{BC}$) i induktivnog otpora 164 Ω (pozitivni imaginarni deo $Z_{BC}$), što je pokazano na sl. 8.5.2. Sada je očevidno da deo *AB* treba da ima kapacitivni, reaktivni otpor $X_C = 164\,\Omega$ (sl. 8.5.2).

Pošto je zadata struja u kapacitetu *C* (sl. 8.5.1), treba uzeti njen smer u *X* osi, tj. $\bar{I}_c = \bar{I}_c = 0{,}1$ [A].

Kompleksni napon na paralelnoj konturi (sl. 8.5.1) je:

$$\bar{U}_{BC} = \bar{I}_C(-jX_C') = 0{,}1\,(-j\,500) = -j\,50 = 50\,\|-90°\|_r \quad [V]$$

Dalje određujemo kompleksnu struju u svitku:

$$\bar{I}_s = \frac{\bar{U}_{BC}}{Z_s} = \frac{50\,\|-90°\|}{127{,}5\,\|78°\,40'\|} = 0{,}39\,\|-168°\,40'\| =$$

$$= (0{,}385-j\,0{,}077)\,[A]$$

Kompleksna ukupna struja je:

$$\bar{I} = \bar{I}_C + \bar{I}_s = 0{,}1 - 0{,}385 - j\,0{,}077 = (-0{,}285 - j\,0{,}077)\,[A]$$

Kompleksni napon na stezaljkama kola je:

$$\bar{U} = \bar{I}\cdot Z_{AC}$$

gde je $\overline{Z}_{AC}$ kompleksni otpor kola (sl. 8.5.2).

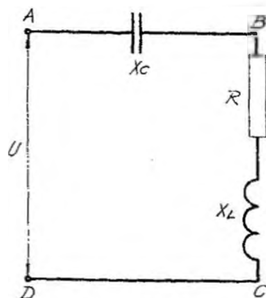
$$\overline{Z}_{AC}=R+jX_L-jX_C=44,3+j\,164-$$
$$-j\,164=44,3\,\Omega$$

Dobijamo da je:

$$\overline{U}=\overline{I}\cdot\overline{Z}_{AC}=(-0,285-j0,077)\,44,3=$$
$$=(-12,6-j\,3,4)\,[\text{V}],$$

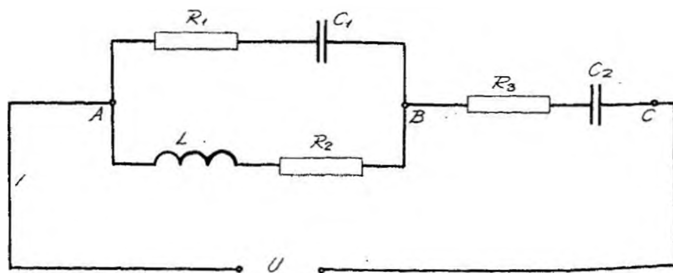
odnosno:

$$U=\sqrt{12,6^2+3,4^2}=13\text{ V}$$



Sl. 8.5.2

**2. primer:** Na sl. 8.5.3 prikazan je mešoviti spoj aktivnih otpora $R_1=2\,\Omega$ $R_2=20\,\Omega$, i $R_3=5\,\Omega$, kondenzator $C_1=100\,\mu\text{F}$ i $C_2=20\,\mu\text{F}$, zatim induktivitet $L=0,08$ H uz $U=220$ V, i $f=50$ Hz. Izračunati prividni otpor spoja i struje u kolu.



Sl. 8.5.3

Rešenje: Kompleksni otpor prve grane je:

$$\overline{Z}_1=R_1-jX_{c1}=R_1-j\frac{10^6}{2\cdot\pi\cdot50\cdot100}=2-j\,32\approx32\,\|-$$
$$-90^\circ\,\|\,[\Omega]$$

Kompleksni otpor druge grane je:

$$\overline{Z}_2=R_2+j\,\omega\,L=20+j\,2\,\pi\cdot50\cdot0,08=20+j\,25,12=$$
$$=32\,\|\,51,5^\circ\,\|\,[\Omega]$$

Prividni otpor paralelnog dela spoja između tačaka $AB$ iznosi:

$$\bar{Z}_{AB}=\frac{\bar{Z}_1\cdot\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1+\bar{Z}_2}=\frac{32\,\|-90^\circ\|\cdot 32\,\|51{,}5^\circ\|}{2-j\,32+20+j\,25{,}12}=\frac{1020\,\|-38{,}5^\circ\|}{22-j\,6{,}88}=$$

$$=\frac{1020\,\|-38{,}5^\circ\|}{23\,\|-18^\circ\|}=44{,}5\,\|-20{,}5^\circ\|=(41{,}5-j\,15{,}6)\ [\Omega]$$

Uporedo s računanjem otpora crtamo i dijagram otpora (sl. 8.5.4) kako bismo mogli kontrolisati i upoređivati dobijene rezultate. Tako za $Z_{AB}$ iz dijagrama dobijamo 44,5 Ω, što odgovara dobijenoj vrednosti računskim putem.

Kompleksni otpor treće grane iznosi:

$$Z_3=R_3-jX_C=R_3-j\frac{1}{2\,\pi f\cdot C_3}=5-j\frac{10^6}{2\cdot 50\cdot 20}=$$

$$=(5-j\,159)\ [\Omega]$$

Prividni otpor celog spoja je:

$$Z=Z_{AB}+Z_3=41{,}5-j\,15{,}6+5-j\,159=46{,}5-j\,174{,}6=$$

$$=180\,\|-75^\circ\|$$

Ukupna struja u simboličkom obliku iznosi:

$$\bar{I}=\frac{\bar{U}}{Z}=\frac{220\,\|0\|}{180\,\|-75^\circ\|}=1{,}22\,\|75^\circ\|\ [\mathrm{A}]$$

Napon $U_{AB}$ između čvorišta $A$ i $B$ iznosi:

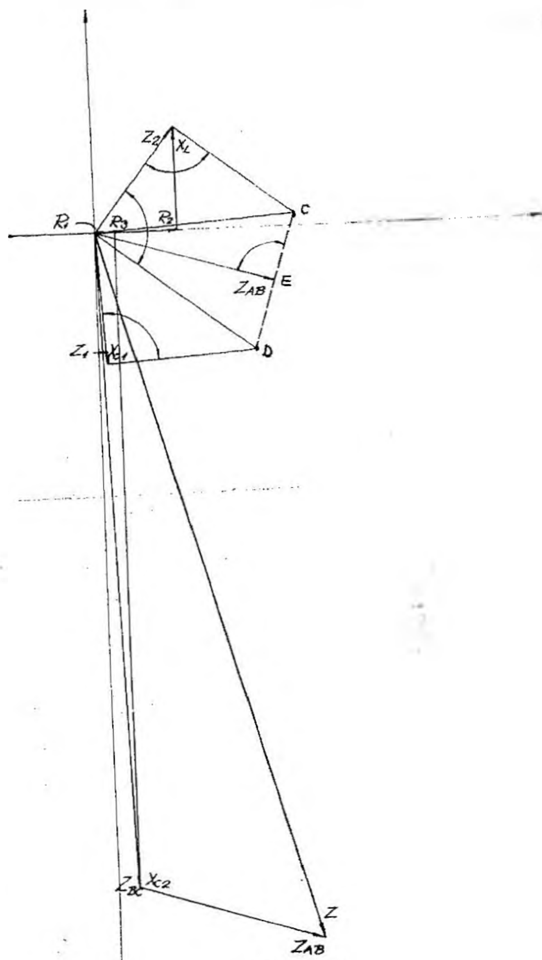
$$\bar{U}_{AB}=\bar{I}\cdot\bar{Z}_{AB}=1{,}22\,\|75^\circ\|\cdot 44{,}5\,\|-20{,}5^\circ\|=54{,}5\,\|54{,}5^\circ\|\ [\mathrm{V}]$$

Struja $I_1$ je onda:

$$\bar{I}_1=\frac{\bar{U}_{AB}}{Z}=\frac{54{,}5^\circ\,\|54{,}5^\circ\|}{32\,\|-90^\circ\|}=1{,}7\,\|144{,}5^\circ\|\ [\mathrm{A}]$$

a struja $I_2$ je:

$$I_2 = \frac{\bar{U}_{AB}}{\bar{Z}_2} = \frac{54{,}5 \angle 54{,}5^\circ}{32 \angle 51{,}5} = 1{,}7 \angle 3^\circ \ [A]$$

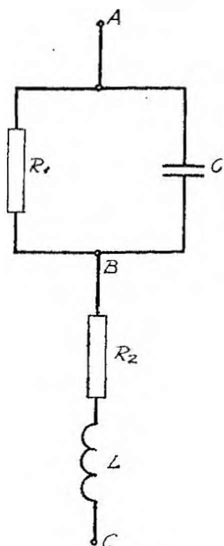



Sl. 8.5.4

## 8.5.3. Zadaci za samostalno rešavanje

1. Izračunati sve struje u kolu (sl. 8.5.1), a takođe i napone na delovima $AB$ i $BC$, ako je $R_s = X_s = 500\ \Omega$, $X_C = 1000\ \Omega$, $X = R_1 = 200\ \Omega$ i $U = 120$ V.

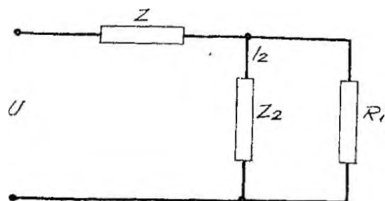
2. Izračunati napone na delovima $AB$ i $BC$ (sl. 8.5.5) i na stezaljkama kola $AC$ ako kroz otpor $R_1$ protiče struja 1,4 A. Parametri kola su $C = 3\,\mu F$, $L = 0{,}2$ H, $R_1 = 100\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$ i $f = 160$ Hz.



Sl. 8.5.5

3. U 2. zadatku uzeti da je poznata ukupna struja $I = 1{,}46$ A, umesto struje grane. Izračunati napon na stezaljkama kola.

4. Za dobijanje razlike faze $\pi/2$ između struje $I_2$ u paralelnoj grani svitka i napona mreže U ponekad se koristi šema, prikazana na sl. 8.5.6. Odrediti otpor $R_1$, pri kojem



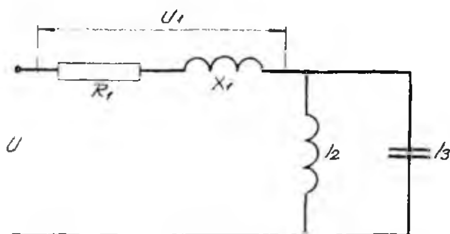
Sl. 8.5.6

struju $I_2$ zaostaje za naponom U za ugao $\pi/2$. Parametri svitka su:

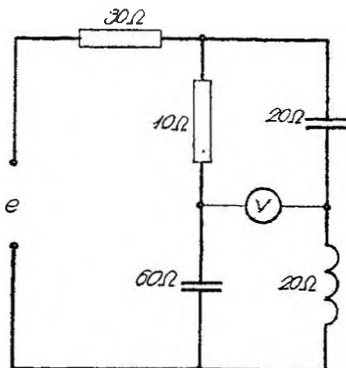
$$Z = (100 + j\,500)\,\Omega\; Z_2 = (400 + j\,1000)\,\Omega.$$

Nacrtati vektorski dijagram struja i napona.

5. Za kolo na sl. 8.5.7 poznato je: $U_1 = 141$ V, $I_2 = 25$ A i $I_3 = 15$ A. Aktivna snaga kola je $P = 1000$ W. Koliki su otpori $R_1$ i $X_1$?



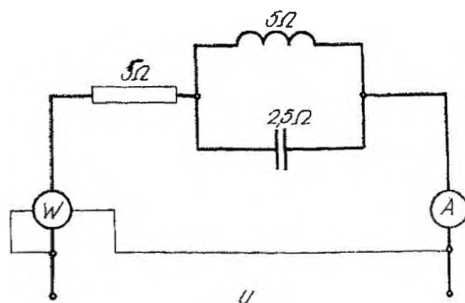
Sl. 8.5.7



Sl. 8.5.8

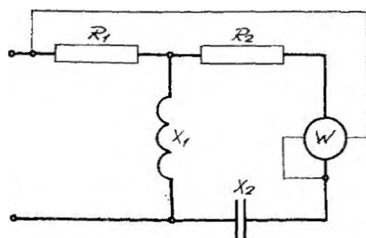
6. U kolu (sl. 8.5.8) je $e = 30 \sin(\omega t + 90°)$ V. Odrediti pokazivanje voltmetra.

7. U kolu (sl. 8.5.9) napon izvora je $u = 100 \sin \omega t$ V. Odrediti pokazivanje instrumenta.

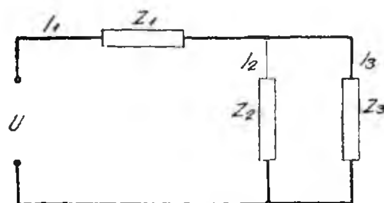



Sl. 8.5.9

8. Naći pokazivanje vatmetra, priključenog u kolo na šemi prikazanoj na sl. 8.5.10. Napon na ulazu je $U = 120$ V. Parametri kola su: $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$, $X_1 = 40\,\Omega$ i $X_2 = -20\,\Omega$.



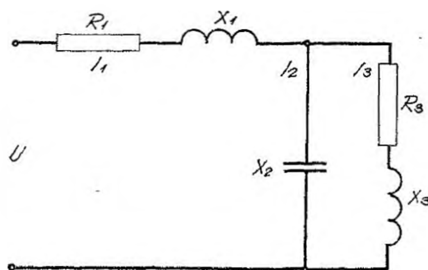

Sl. 8.5.10




Sl. 8.5.11

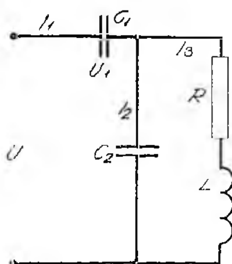
9. U kolu (sl. 8.5.11) je: $U = 20$ V, $\overline{Z}_1 = 4 + j\,8$, $\overline{Z}_2 = 10\,e^{j37°}$ i $\overline{Z}_3 = 3 - j\,4$. Odrediti struje $I_1, I_2, I_3$ i snagu $P$.

10. U kolu (sl. 8.5.12) su $R_1 = 2\,\Omega$, $X_1 = 26\,\Omega$, $R_3 = 10\,\Omega$, $X_3 = 10\,\Omega$, $X_2 = -10\,\Omega$. Snaga potrebna kolu je $P = 1{,}2$ kW. Odrediti struje $I_1$, $I_2$ i $I_3$.

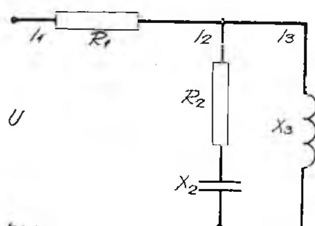



Sl. 8.5.12

11. Dato je kolo (sl. 8.5.13) sa: $U_1 = 5\text{ V}$, $\omega = 10^5 \frac{1}{s}$, $C_1 = 10\ \mu\text{F}$, $C_2 = 5\ \mu\text{F}$, $R = 1\ \Omega$ i $L = 2 \cdot 10^{-2}$ mH. Koliki su napon $U$ i struje $I_1$, $I_2$ i $I_3$?



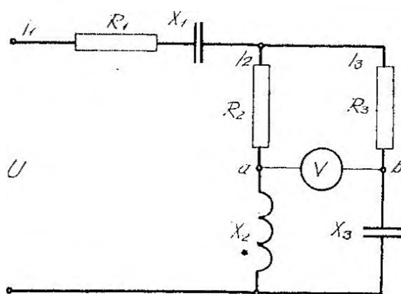

Sl. 8.5.13



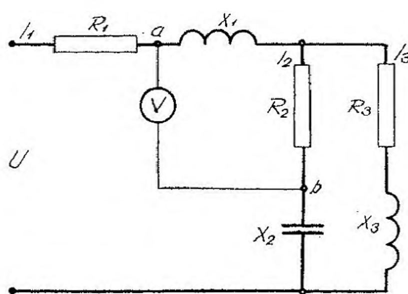

Sl. 8.5.14

12. Dato je kolo (sl. 8.5.14) sa $R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 6\ \Omega$, $X_2 = -8\ \Omega$, $X_3 = 10\ \Omega$ i $I_3 = 10$ A. Kolike su struje $I_1$ i $I_2$ napon $U$ i snaga $P$?

13. U kolu (sl. 8.5.15) su: $R_1 = 2\ \Omega$, $X_1 = -8\ \Omega$, $X_2 = 5\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $R_3 = 10\ \Omega$, $X_3 = -10\ \Omega$ i $U_{AB} = 20$ V. Kolike su struje $I_1$, $I_2$ i $I_3$ napon $U$ i snaga $P$?



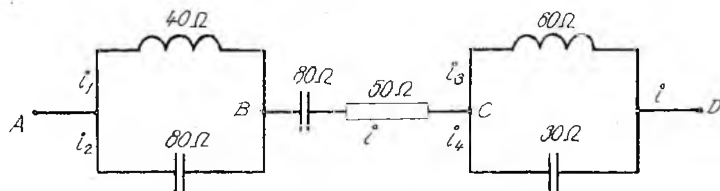

Sl. 8.5.15




Sl. 8.5.16

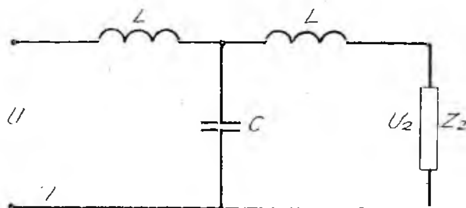
14. U kolu (sl. 8.5.16) dato je: $U_{AB} = 30$ V, $R_1 = 3\ \Omega$, $X_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 1\ \Omega$, $X_2 = -2\ \Omega$, $R_3 = 2\ \Omega$ i $X_3 = 6\ \Omega$. Odrediti struje $I_1$, $I_2$ i $I_3$, napon $U$ i snagu $P$.

15. U kolu (sl 8.5.17) je: $U_{AD} = 100 \sin \omega t$ [V]. Odrediti trenutne vrednosti struja $i$, $i_1$, $i_2$, $i_3$, $i_4$ i napona $u_{AB}$ i $u_{CD}$.



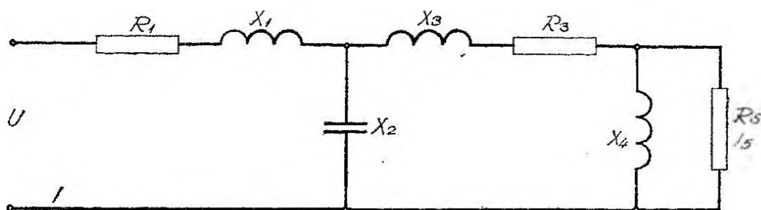

Sl. 8.5.17

16. U kolu (sl. 8.5.18) izabrani $C$ tako da pri zadatom $Z_2 = R_2 + jX_2$ i $L$ modulu $U_2$ bude jednak $U$.




Sl. 8.5.18

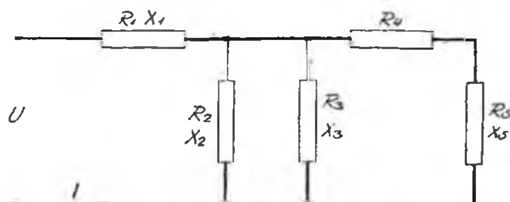
17. Odrediti napon $U$ (sl. 8.5.19), struju $I$, snagu $P$ u kolu




Sl. 8.5.19

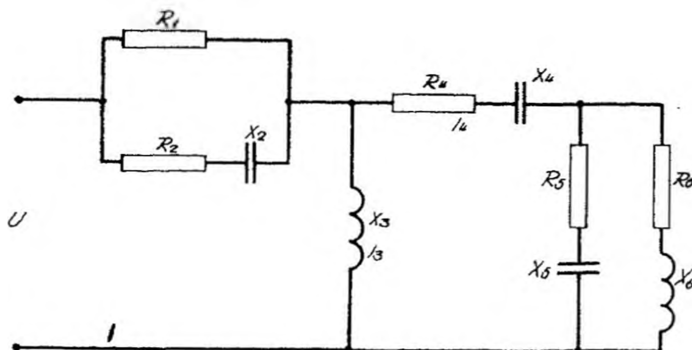
i $\cos\varphi$, ako je struja $I_5 = 10$ A, a otpori $R_1 = 1\ \Omega$, $X_1 = 1\ \Omega$, $X_2 = -2\ \Omega$, $R_3 = 2{,}5\ \Omega$ $X_3 = 5\ \Omega$, $X_4 = 5\ \Omega$ i $R_5 = 2\ \Omega$.

18. Za kolo (sl. 8.5.20) zadato je: $R_1 = 2\,\Omega$, $X_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $X_2 = 6\,\Omega$, $R_3 = 2\,\Omega$, $X_3 = -6\,\Omega$, $R_4 = 0{,}5\,\Omega$, $R_5 = 2\,\Omega$ i $X_5 = 4\,\Omega$. Snaga trošena u drugom delu kola je $P_2 = 200$ W. Koliki su napon $U$, struja $I$, $\cos\varphi$ svih grana i snaga $P$ potrebna celom kolu?



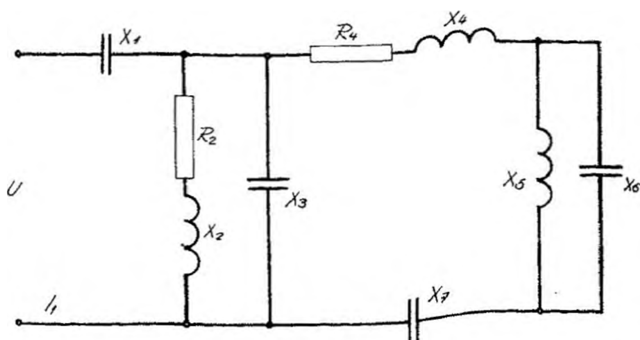

Sl. 8.5.20

19. Na stezaljkama kola (sl. 8.5.21) napon izvora je $U = 100$ V. Parametri kola su $R_1 = 50\,\Omega$, $R_2 = 25\,\Omega$, $X_2 = -25\,\Omega$, $X_3 = 10\,\Omega$, $R_4 = 2{,}5\,\Omega$, $X_4 = -5\,\Omega$, $R_5 = 1\,\Omega$, $X_5 = -2\,\Omega$, $R_6 = 1\,\Omega$ i $X_6 = 2\,\Omega$. Kolike su struje $I$, $I_3$ i $I_4$?



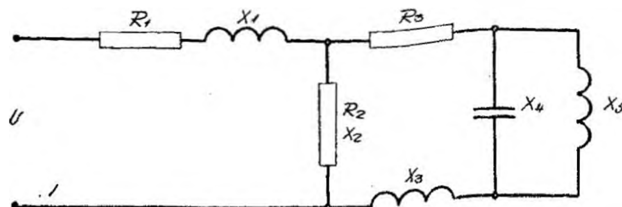

Sl. 8.5.21

20. Na stezaljke kola (sl. 8.5.22) je napon izvora $U = 200$ V. Parametri kola su: $X_1 = -4\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $X_2 = 2\,\Omega$, $X_3 = -2\,\Omega$, $R_4 = 2\,\Omega$, $X_4 = 4\,\Omega$, $X_5 = 4\,\Omega$, $X_6 = -8\,\Omega$ i $X_7 = -10\,\Omega$. Izračunati struju $I_1$, kompleksne snage svih grana i $\cos\varphi$.




Sl. 8.5.22

21. Parametri kola su (sl. 8.5.23): $R_1 = 10\,\Omega$, $X_1 = 10\,\Omega$, $R_3 = 20\,\Omega$, $X_3 = 20\,\Omega$ $X_4 = -10\,\Omega$ i $X_5 = 15\,\Omega$. Izabrati parametre




Sl. 8.5.23

$R_2$ i $X_2$ tako da pri napona $U = 200$ V i $I = 10$ A faktor snage celog kola bude $\cos\varphi = 1$.

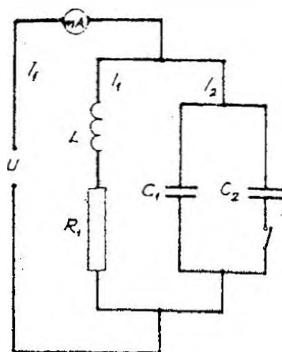
## 8.6. PARALELNA ILI STRUJNA REZONANSA

### 8.6.1. **Osnovni pojmovi i formule**

Na sledećem primeru objasnićemo ponašanje paralelnog spoja pri strujnoj rezonansi.

8.6.2. **Primer:** U zadatku prema sl. 8.6.1 izračunati frekvenciju napona izvora pri kojoj nastaje strujna rezonansa i izračunati u tom slučaju sve struje. Sem toga izračunati ukupnu struju u kolu pri isključenju kondenzatora $C_2$.

Zadato je: $U=65$ V, $L=2{,}5$ mH, $C_1=90\cdot10^{-12}$ F, $C_2=30\cdot10^{-12}$ F, $R_1=1000\,\Omega$.



Sl. 8.6.1

Rešenje: U posmatranom kolu, koje sadrži dve paralelne grane (induktivnog i kapacitivnog karaktera) pri jednakosti induktivne i kapacitivne provodnosti grana $B_L=B_C$) nastupa režim strujne rezonanse.

a. Izračunavanje rezonantne frekvencije:

Uslov rezonanse ($B_L=B_C$) dobija se pri frekvenciji (rezonantnoj):

$$f_r=\frac{1}{2\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{\frac{L}{C}-R_1^2}{\frac{L}{C}-R_2^2}}\ [\text{Hz}] \qquad (8.6.1)$$

Dati izraz za rezonantnu frekvenciju $f_r$ možemo posmatrati da se sastoji od dva dela ($f_0$ i A). Prvi deo $\left(f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}\right)$ određuje uslov za nastanak redne (naponske) rezonanse. Drugi deo (koeficijent $A$) uzima u obzir izmenu frekvencije radi prisustva radnih otpora $R_1$ i $R_2$ (u našem primeru radni otpor grane sa kapacitetom je $R_2=0$).

U slučaju zatvorenog prekidača ($P$) ukupni kapacitet grane sa kapacitetom je: $C=C_1+C_2=120\ 10^{-12}$ F, pa imamo:

$$f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}=\frac{1}{6{,}28\sqrt{2{,}5\ 10^{-3}\cdot120\ 10^{-12}}}=290{,}4\cdot10^3\,[\text{Hz}];$$

$$A=\sqrt{\frac{\frac{L}{C}-R_1}{\frac{L}{C}}}=\sqrt{\frac{\frac{2{,}5\ 10^9}{120}-1000^2}{\frac{2{,}5\ 10^9}{120}}}=0{,}976$$

pa je:

$f_r=f_0 A=290{,}4\ 10^3\ 0{,}976=284\cdot10^3$ Hz

i $\omega_r=2\pi f_r=6{,}28\cdot284\cdot10^3\cdot178\cdot10^4\ \frac{1}{s}$

Znači da bi u posmatranom kolu nastala rezonansa treba ga napajati s izvorom čija je frekvencija $284 \cdot 10^3$ Hz.

b) Izračunavanje provodnosti: U režimu rezonanse induktivna i kapacitivna provodnost grana su jednake:

$$B_L = E_C = \omega\, C = 178\; 10^4\; 120\; 10^{-12} = 2{,}14 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{S}$$

Reaktivna provodnost celog kola je:

$$B = B_L - B_C = 2{,}14\; 10^{-4} - 2{,}14\; 10^{-4} = 0$$

Radna provodnost induktivne grane $G_1$ u našem slučaju jednaka je radnoj provodnosti celog kola $G$, pošto je radni otpor druge grane $R_2 = 0$, pa imamo (prema izrazu 8.3.12):

$$G = G_1 = \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega\, L)^2} = \frac{1000}{1000^2 + (178\; 10^4\; 2{,}5\; 10^{-3})^2} =$$

$$= 0{,}48\; 10^{-4}\ \mathrm{S}$$

Ukupna provodnost kola je:

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2} = G = 0{,}48\; 10^{-4}\ \mathrm{S}$$

Znači u režimu struja rezonanse ukupna provodnost kola jednaka je radnoj provodnosti.

Sada možemo nacrtati dijagram provodnosti (sl. 8.6.2) iz koje vidimo, da u kapacitivnoj grani u našem slučaju trougao provodnosti prelazi u pravu ($G_2 = 0$).

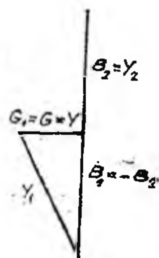
c) Izračunavanje struja. U pravoj grani radna i reaktivna komponenta struje su:

$$I_{1a} = U \cdot G_1 = 65 \cdot 0{,}48\; 10^{-4} = 3{,}12\; 10^{-3}\, A = 3{,}12\ \mathrm{mA}$$

$$I_{1j} = U \cdot B_1 = 65 \cdot 2{,}14\; 10^{-4} = 13{,}9\; 10^{-3}\, A = 13{,}9\ \mathrm{mA}$$

Ukupna struja grane:

$$I_1 = \sqrt{I_{1a}^2 + I_{1j}^2} = \sqrt{3{,}12^2 + 13{,}9^2} = 14{,}2\ \mathrm{mA}$$




**Sl. 8.6.2**

U drugoj grani:

$I_{2a} = U \cdot G_2 = U \cdot O = 0$

$I_{2j} = U \cdot B_2 = -U B_1 = -I_{1j} = -13{,}9$ mA

pa sledi:

$I_2 = 13{,}9$ mA

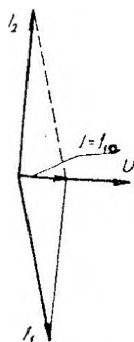
Radna i reaktivna komponenta ukupne struje kola je:

$I_a = I_{1a} + I_{2a} = 3{,}12$ mA

$I_j = I_{j1} + I_{2j} = 13{,}9 - 13{,}9 = 0$

Ukupna struja kola:

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_j^2} = \sqrt{3{,}12^2 + 0} = 3{,}12 \text{ mA}$$




Sl. 8.6.3

Prema dobijenim vrednostima struja nacrtajmo vektorski dijagram struja (sl. 8.6.3) iz kojeg vidimo još bolje, da pri strujnoj rezonansi ukupna struja je u fazi sa naponom i jednaka sumi radnih komponenti struja grana (u našem slučaju $I = I_{1a}$, pošto je $I_{2a} = 0$),

d. Pri isključenju prekidača (P) imamo:

Kapacitivna provodnost grane je:

$B_C = \omega C = 178\ 10^4\ 90\ 10^{-12} = 1{,}6\ 10^{-4}$ S

Provodnosti $G_1$ i $B_1$ prve grane ostaju iste, pa je reaktivna provodnost celog kola:

$$B = B_L - B_C = 2{,}14\ 10^{-4} - 1{,}6\ 10^{-4} = 0{,}54\ 10^{-4} \text{ S}$$

i ukupna provodnost celog kola

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{(0{,}4 10^{-4})^2 + (0{,}54\ 10^{-4})^2} = 0{,}72\ 10^{-4} \text{ S}$$

Ukupna struja kola je:

$$I = UY = 65 \cdot 0{,}72 \cdot 10^{-4} = 4{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 4{,}7 \text{ mA}$$

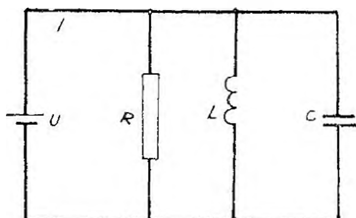
Vidimo da se struja uvećala od 3,12 mA do 4,7 mA.

### 8.6.3. **Zadaci za samostalno rešavanje**

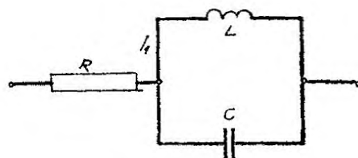
1. U kolu (sl. 8.6.4) zadato je $U = 100$ V, $R = 50\,\Omega$, $L = 282\ 10^{-6}$ H, $C = 0{,}1\ \mu$F. Treba izračunati: rezonantnu frekvenciju, struje u granama i u nerazgranatom delu kola pri rezonansi kao i pri $f = 2f_r$.

2. Paralelna kontura u kolu (sl. 8.6.5) nalazi se u rezonansi pri frekvenciji $\omega = 5 \cdot 10^4$ 1/s, $C = 0{,}4\ \mu$F, $I_1 = 2$ A.

Izračunati napon priključen na kolo i napon na radnom otporu.



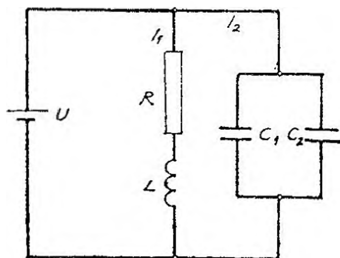

Sl. **8.6.4**



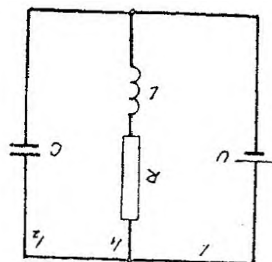

Sl. **8.6.5**

3. Dato je kolo (sl. 8.6.6) pri sledećim vrednostima: $u = 10 \sin 10^5 t$, $R = 10\,\Omega$, $L = 0{,}4$ mH, $C_1 = 0{,}1\ \mu$F. Kolo se nalazi u rezonansi. Izračunati: $C_2$, $I_1$, $I_2$, $I$ i snagu potrebnu kolu.

4. Kolo (sl. 8.6.7) nalazi se u stanju rezonanse pri $U = 30$ V, $\omega = 5\ 10^3$ 1/s, $I = 225$ mA, $I_1 = 375$ mA. Izračunati kapacitet kondenzatora.



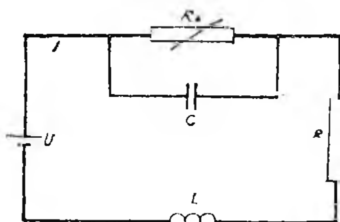

Sl. **8.6.6**



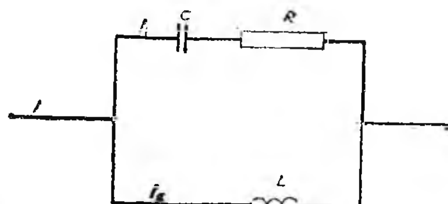
Sl. **8.6.7**

5. U kolu (sl. 8.6.8) zadate su sledeće vrednosti: $U = 100$ V, $R = 15\,\Omega$, $X_L = 5\,\Omega$, $X_C = 10\,\Omega$. Izračunati: otpor $R_0$ pri kojem će kolo stupiti u rezonansu i struju rezonanse.

6. Kolo (sl. 8.6.9) nalazi se u stanju rezonanse pri $I_1 = 7$ A i $I = 3{,}6$ A. Izračunati struju $I_2$.



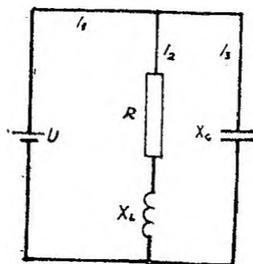

Sl. 8.6.8



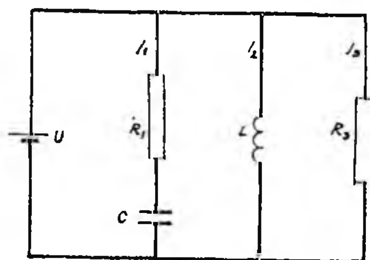

Sl. 8.6.9

7. Kolo (sl. 8.6.10) nalazi se u rezonansi. Snaga potrebna kolu je $P = 80$ W, $I_1 = 4$ A, $I_2 = 5$ A. Izračunati $R$, $X_L$ i $X_C$.

8. Kolo (sl. 8.6.11) nalazi se u rezonansi. Snaga potrebna kolu je $P = 100$ W. Struje u granama su: $I_1 = 3$ A, $I_2 = 4$ A, $R_1 = R_3$.



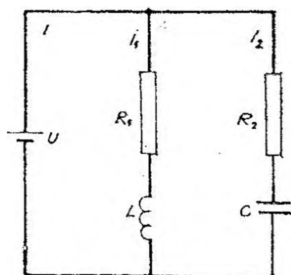

Sl. 8.6.10




Sl. 8.6.11

Frekvencija izvora je $f = 5\,10^3$ Hz. Izračunati: $L$, $C$, struju pri rezonansi. Kakva treba biti vrednost kapaciteta $C$ da bi celo kolo bilo u stanju rezonanse pri frekvenciji $f_1 = 10^4$ Hz.

9. U kolu (sl. 8.6.12.) zadato je: $U = 50\,\mathrm{V}$, $f = 150\,\mathrm{Hz}$, $R_1 = 8\,\Omega$, $R_2 = 5\,\Omega$, $X_L = 6\,\Omega$. Kolo se nalazi u stenju rezonanse. Izračunati $C$ i $I$.




**Sl. 8.6.12**

Rešenje zadataka uz glavu 8.6.

**1.** $10^4$ Hz, $I = 2$ A, $I_L = I_C = 1{,}89$ A, $I = 2$ A
pri $f = 2f_0$ = :2 A, 0,95 A, 3,78 A, 3,46 A.

**2.** 100 V, 0.

**3.** 0,135 μF, 0,172 A, 0,166 A, 0,025 A, 0,3 W.

**4.** 2 μF.

**5.** 10 Ω, 5 A.

**6.** 6 A.

**7.** 3,2 Ω, 2,4 Ω, 6,6 Ω.

**8.** 9 μF, 0,256 mH, 6,24 A, 1,06 μF ili 0,071 μF.

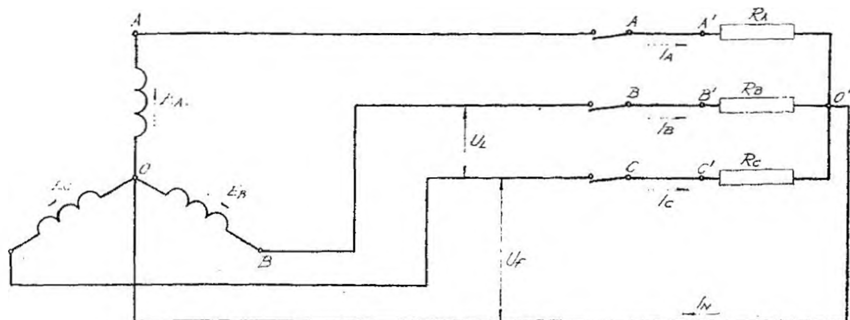
**9.** 71 μF, 640 μF, 5 A.

# 9. TROFAZNE STRUJE

## 9.1. ČETVOROŽIČNA KOLA

### 9.1.1. Osnovni pojmovi i formule

Na sl. 9.1.1 prikazana je četvorožična mreža s generatorom i potrošačima spojenim u zvezdu.



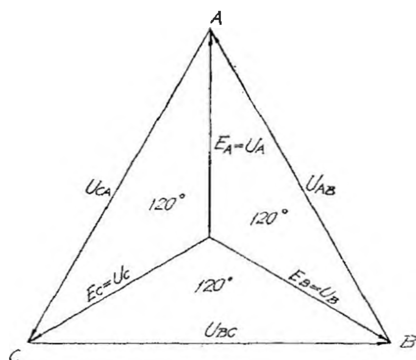
Sl. 9.1.1

Na sl. 9.1.2 vektorski su prikazani fazni i linijski naponi simetričnog trofaznog sistema.

U slučaju da je unutrašnji otpor generatora zanemariv, tada su fazne ems jednake faznim naponima $\bar{U}_A$, $\bar{U}_B$ i $\bar{U}_C$. Na sl. 9.1.2 se vidi da su linijski naponi $\bar{U}_{AB}=\bar{U}_A-\bar{U}_B$, $\bar{U}_{BC}=\bar{U}_B-\bar{U}_C$ i

$\bar{U}_{CA} = \bar{U}_C - \bar{U}_A$, postavljeni kao geometrijska razlika odgovarajućih faznih napona. Na sl. 9.1.2 se takođe vidi da su linijski naponi jednaki $U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_L$ i da su za $\sqrt{3}$ puta veći od faznih $U_A = U_B = U_C = U_f$.

Ako zanemarimo padove napona u provodnicima $AA'$, $BB'$ i $CC'$ (sl. 9.1.1), onda se u razmatranom kolu fazni naponi potrošača jednaki faznim naponima generatora $U_A' = U_A$, $U_B' = U_B$ i $U_C' = U_C$.



Sl. 9.1.2

Fazne struje u kolu su:

$$I_A = \frac{P_A}{U_f \cdot \cos\varphi_1} \text{ [A]}$$

$$I_B = \frac{P_B}{U_f \cdot \cos\varphi_2} \text{ [A]} \qquad (9.1.1)$$

$$I_C = \frac{P_C}{U_f \cdot \cos\varphi_3} \text{ [A[}$$

## 9.1.2. Primer

**1. primer:** Iz mreže trofazne struje linijskog napona 380 V napajaju se potrošači koji su raspoređeni u tri grupe. Spojeni su u zvezdu i priključeni na četvorožičnu mrežu (sl. 9.1.1). Odrediti u svim provodnicima mreže struje i ukupnu snagu, ako snaga potrošača uključenih u fazu A iznosi 3,52 kW, u fazi B 2,64 kW i u fazi C 3,96 kW. Kako će se promeniti struja ako u fazi B umesto otpora $R_B$ uključimo aktivno-kapacitivni potrošač ($\varphi = 30°$) s prividnim otporom $Z_B = R_B$? Kako će se promeniti napon na fazama potrošača pri prekidu neutralnog provodnika?

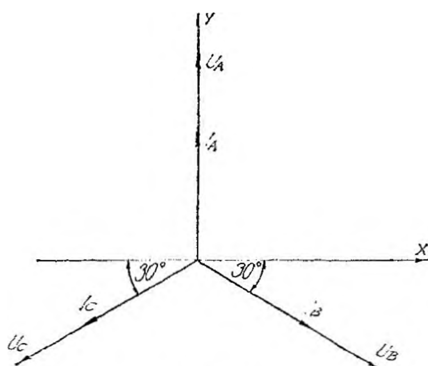
Rešenje: Uzimajući u obzir da su zadati potrošači sa $\cos\varphi = 1$, imamo:

$$I_A = \frac{P_A}{U_f} = \frac{3520}{220} = 16 \text{ A}$$

$$I_B = \frac{P_B}{U_f} = \frac{2640}{220} = 12 \text{ A}$$

$$I_C = \frac{P_C}{U_f} = \frac{3960}{220} = 18 \text{ A}$$

Dijagram struja i napona dat je na sl. 9.1.3.



Sl. 9.1.3

Struje u neutralnom provodniku odredićemo prema prvom Kirhofovom zakonu koji treba primeniti u kompleksnom obliku. Pre toga napišemo kompleksne oblike faznih struja na osnovu vektorskog dijagrama na sl. 9.1.3.

$$\bar{I}_A = iI_A \| 90^\circ \| = j\,16 \text{ [A]}$$

$$\bar{I}_B = I_B \| -30^\circ \| = 12(\cos 30^\circ - j\sin 30^\circ) = (10{,}4 - j\,6) \text{ [A]}$$

$$\bar{I}_C = I_C \| -150 \| = 18(\cos 150^\circ - j\sin 150^\circ) = (-15{,}6 - j\,9) \text{ [A]}.$$

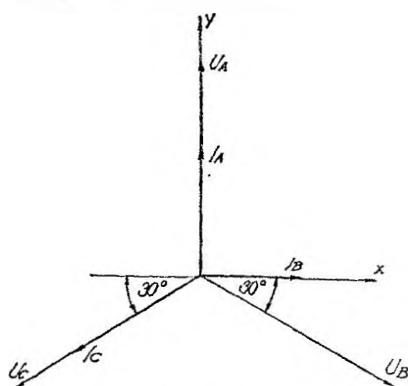
Kompleksni oblik struje u neutralnom provodniku je:

$$\bar{I}_N = \bar{I}_A + \bar{I}_B + \bar{I}_C = j\,16 + 10{,}4 - j\,6 - 15{,}6 - j\,9 = (-5{,}2 + j\,1) = 5{,}29 \| 169^\circ \| \text{ [A]}$$

Aktivna snaga celog kola iznosi:

$$P = P_A + P_B + P_C = 3{,}52 + 2{,}64 + 3{,}96 = 10{,}12 \text{ kW}$$

Ako umesto $R_B$ uzmemo otpor $Z_B$ struja iznosi: $I_B = \frac{U_B}{Z_B} = \frac{U_B}{R_B} = 1$ A, tj. ostaje ista kao i ranije, ali sada prethodi u fazi napon $U_B$ za 30° (sl. 9.1.4), jer $Z_B$ ima kapacitivni karakter.




Sl. 9.1.4

U kompleksnom obliku struja ima oblik (sl. 9.1.4):

$$\bar{I}_B = I_B \| 0° \| = 12 \text{ A}$$

Struje u drugim potrošačima ($I_A$ i $I_C$) ostaju iste i po vrednosti i po fazi.

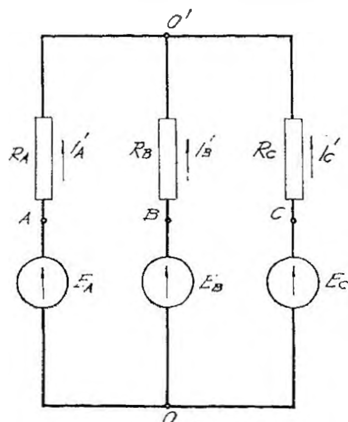
U tom slučaju struja u neutralnom vodiču iznosi:

$$\bar{I}_N = \bar{I}_A + \bar{I}_B + \bar{I}_C =$$

$$= j\,16 + 12 + (-15{,}6 - j\,9) = -3{,}6 + j\,7 = 7{,}86 \| 117°\,20 \| \text{ [A]}$$

Na kraju da vidimo kako će se promeniti napon na fazama potrošača u slučaju prekida neutralnog provodnika.

Razmatrano kolo (sl. 9.1.1) ima samo dva čvora ($O$ i $O'$), i pri odsustvu neutralnog provodnika ima drugu šemu nacrtanu na sl. 9.1.5. Proračun takvog kola najbolje ja izvršiti metodom dva čvora (vidi glavu 5.4), koju u kolima naizmenične struje možemo primeniti samo upotrebom simboličke metode. Napon između čvornih tačaka $O'$ i $O$ (sl. 9.1.5), tj. između neutralnih tačaka generatora i potrošača je:




Sl. 9.1.5

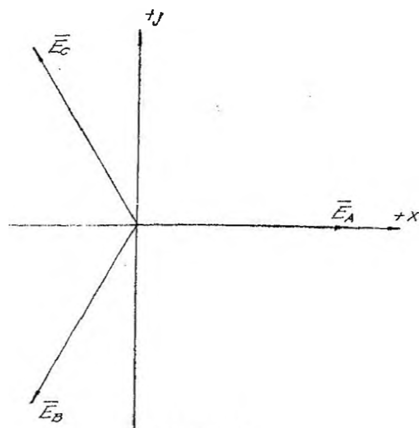
$$\bar{U}_N = \bar{U}_{o'o} =$$

$$= \frac{\bar{E}_A \cdot Y_A + \bar{E}_B \cdot Y + \bar{E}_C \cdot Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C}$$

Pre toga izrazimo fazne ems u kompleksnom obliku postavljajući vektor $E_A$ u smeru $X$ ose (sl. 9.1.6):

$$\bar{E}_A = \bar{U}_A = 220 \text{ V},$$

$$\bar{E}_B = \bar{U}_B = (-110 - j\,190) \text{ V}, \quad \bar{E}_C = \bar{U}_C = (-110 + j\,190) \text{ V}$$



Sl. 9.1.6

Izračunajmo i aktivne provodnosti faza:

$$Y_A = \frac{1}{R_A} = 0{,}0735 \text{ S}$$

$$Y_B = \frac{1}{R_B} = 0{,}055 \text{ S}$$

$$Y_C = \frac{1}{R_C} = 0{,}082 \text{ S}$$

Tada je:

$$\bar{U}_N = \frac{220 \cdot 0{,}073 + (-110 - j\,190)\,0{,}055 + (-110 + j\,190)\,0{,}082}{0{,}073 = 0{,}055 + 0{,}082} =$$

$$= \frac{1{,}03 + j\,5{,}17}{0{,}21} = (4{,}9 + j\,24{,}6)\,[\text{V}]$$

Fazni napon potrošača je:

$$\bar{U}_A' = \bar{E}_A - \bar{U}_N = 220 - 4{,}9 - j\,24{,}6 = 216{,}6\,\|{-6^\circ\,35'}\|\,[\text{V}]$$

$$\bar{U}_B' = \bar{E}_B - \bar{U}_N = -110 - j\,190 - 4{,}9 - j\,24{,}6 = 244\,\|{-118^\circ}\|\,[\text{V}]$$

$$\bar{U}_C' = \bar{E}_C - \bar{U}_N = -110 + j\,190 - 4{,}9 - j\,24{,}6 = 202\,\|125^\circ\|\,[\text{V}]$$

### 9.1.3. **Zadaci za samostalno rešavanje**

1. U četvorožičnu mrežu trofazne struje uključene su u spoju zveda tri grupe sijalica. Snaga sijalica uključenih u fazu A iznos 880 W, u fazu B — 440 W i u fazu C — 660 W. Linijski napon je $U_L = 380$ V. Izračunati struju u linijskim provodnicima i u neutralnom provodniku. Nacrtati u razmeri vektorski dijagram.

2. Sijalice ukupne snage 2,4 kW raspoređene su u tri grupe i uključene u četvorožičnu mrežu trofazne struje. Odrediti struje u linijskim provodnicima i nacrtati u razmeri vektorski dijagram, ako je struja u neutralnom provodniku jednaka nuli, a fazni napon je 220 V.

3. U četvorožičnom sistemu s linijskim naponom 380 V odnos struja u fazama potrošača je $I_A : I_B : I_C = 1 : 3 : 4$. Svi potrošači su aktivni i ukupna snaga iznosi 3,2 kW. Izračunati struje u linijskim provodnicima i u neutralnom provodniku.

4. Tri aktivna otpora spojena su u zvezdu na četvorožičnu mrežu. Struje u fazama iznose $I_A = I_B = I$, a $I_C = 2\,I$. Odrediti struju u neutralnom provodniku i nacrtati vektorski dijagram.

5. U četvorožičnoj mreži s faznim naponom 380 V spojena su u zvezdu tri potrošača. Snaga potrošača u fazi A iznosi $P_A = 2{,}4$ kW i $\cos\varphi_A = 0{,}9$, u fazi B snaga $P_B = 2{,}0$ kW i $\cos\varphi_B = 0{,}87$, u fazi C snaga $P_C = 2{,}4$ kW i $\cos\varphi_C = 0{,}94$. Odrediti struju u svim provodnicima i nacrtati vektorski dijagram, ako su $\varphi_A$, $\varphi_B$ i $\varphi_C$ pozitivni uglovi.

6. Za kolo iz 5. zadatka odrediti struju u neutralnom provodniku pri prekidu linijskog provodnika faze A i faze B (pojedinačno).

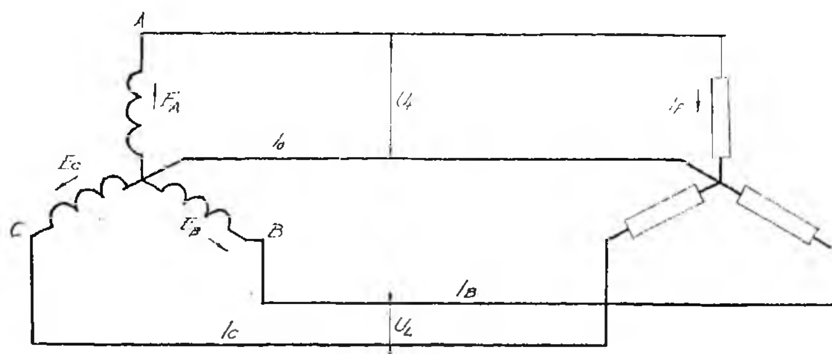
7. Za kolo iz 1. zadatka odrediti (grafički i analitički) fazne napone pri prekidu neutralnog voda.

8. Tri grupe sijalica spojene su u zvezdu,i napajanju se prko četvorožične mreže trofazne struje linijskog napona 380 V. Otpor svake sijalice je 170 Ω. Grupa faze A sastoji se od 10 paralelno uključenih sijalica, faza B od 24 sijalica i faze i faza C od 34 sijalice. Izračunati napon na sijalicama za dve vrednosti otpora neutralnog voda: 1) $R_N = 2\,\Omega$ i 2) $R_N = 0{,}5\,\Omega$. Reaktivni otpor neutralnog voda zameniti. Za prvi režim ($R_N = 2\,\Omega$) nacrtati dijagram napona.

## 9.2. TROFAZNA KOLA S POTROŠAČIMA SPOJENIM U ZVEZDU

### 9.2.1. Osnovni pojmovi i formule

1. Zvezda je takav spoj, u kome krajeve faza spajamo u jednu tačku, nazvanu neutralnom ili nul-tačkom, (sl. 9.2.1).




**Sl. 9.2.1**

2. Napone između početaka i krajeva faze nazivamo faznim i označavamo ih sa $U_A$, $U_B$ i $U_C$ ili uopšteno sa $U_f$.

3. Naponi između početaka faza ili između linijskih provodnika nazivaju se linijskim naponima i označavaju se sa $U_{AB}$, $U_{BC}$, $U_{CA}$ ili uopšteno $U_L$.

4. Efektivna vrednost linijskog napona je za $\sqrt{3}$ puta veća od efektivne vrednosti faznog napona:

$$U_L = \sqrt{3} \cdot U_f \tag{9.2.1}$$

5. Struje koje teku kroz linijske provodnike nazivaju se linijskim i označavaju se sa $I_A$, $I_B$, $I_C$ ili sa $I_L$.

6. Struje koje teku kroz faze nazivaju se faznim strujama:

$$I_f = I_L \tag{9.2.2}$$

7. Fazne struje potrošača određujemo isto kao u jednofaznim kolima naizmenične struje:

$$I_A = \frac{U_A}{Z_A} [A]$$

$$I_B = \frac{U_B}{Z_B} [A] \quad (9.2.3)$$

$$I_C = \frac{U_C}{Z_C} [A]$$

gde su $Z_A$, $Z_B$ i $Z_C (\Omega)$ prividni otpori faza potrošača.

8. Ugao pomaka faza između struja i faznih napona određujemo iz formula:

$$\cos\varphi_A = \frac{R_A}{Z_A} \quad \cos\varphi_B = \frac{R_B}{Z_B} \quad \cos\varphi_C = \frac{R_C}{Z_C} \quad (9.2.4)$$

9. Struja u neutralnom provodniku $I_0$ po prvom Kirhofovom zakonu iznosi:

$$\bar{I}_0 = \bar{I}_A + \bar{I}_B + \bar{I}_C \quad (9.2.5)$$

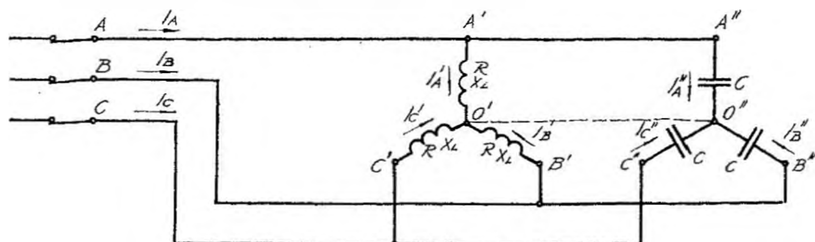
10. Aktivna snaga kola je:

$$P = 3 \cdot P = 3_f \cdot U_f \cdot I_f \cdot \cos\varphi_f [W] \quad (9.2.6)$$

### 9.2.2. **Primeri**

**1. primer:** Trofazni električni motor čija je šema data na sl. 9.2.2 ima aktivni opor svake faze $R = 0{,}6\,\Omega$ i induktivni $X_L = 0{,}8\,\Omega$ Napaja se iz mreže linijskog napona 380 V. Na motor je spojena baterija kondenzatora (sl. 9.2.2) za popravljanje faktora snage svake faze na 0,92. Izračunati struje $I_A'$, $I_B'$ i $I_C'$ u fazama motora i struje $I_A$, $I_B$ i $I_C$ u linijama vodova. Nacrtati vektorski dijagram. Izračunati aktivnu snagu i prividnu snagu kola.

Kako će se promeniti struje i naponi u kolu pri prekidu linijskog provodnika u fazi A? Kako će se promeniti struje i naponi u kolu ako dođe do kratkog spoja faze A?

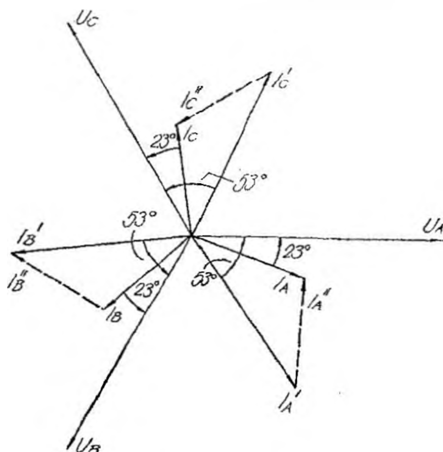



Sl. 9.2.2

Rešenje: Pošto su namotaji motora jednakih otpora, a spojeni kondenzatori su jednakih kapaciteta, to je potrošač u celini (motor s kondenzatorom) simetričan i zato nije potreban neutralni provodnik. Za simetričan potrošač spojen u zvezdu fazni napon je $U_f = U_L/\sqrt{3} = 380/1{,}73 = 220$ V. Struje u nomotajima motora iznose:

$$I_A' = I_B' = I_C' = I_f' = \frac{U_f}{Z} = \frac{220}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{220}{\sqrt{0{,}6^2 + 0{,}8^2}} = 220 \text{ A}$$

One zaostaju u fazi za naponom za ugao (sl. 9.2.3):




Sl. 9.2.3

$$\varphi = \arccos \frac{R}{Z} = \frac{0{,}6}{1} = 53°$$

Aktivna provodnost faza jednaka je aktivnoj provodnosti namotaja motora.

$$G_f = \frac{R}{R^2 + X_L^2} = \frac{0{,}6}{1} = 0{,}6 \text{ S}$$

a reaktivna provodnost faza je:

$$B_f = G_f \cdot \operatorname{tg} \varphi_f = 0{,}6 \cdot \operatorname{tg} 23° = 0{,}25 \text{ S}$$

pošto zadatom $\cos \varphi f = 0{,}92$ odgovara $\varphi_f = 23°$.

Prividna provodnost je:

$$Y_f = \sqrt{G_f^2 + B_f^2} = \sqrt{0{,}6^2 + 0{,}25^2} = 0{,}65 \text{ S}$$

Linijske struje su: $I_A = I_B = I_C = I_L = U \cdot Y_f = 220 \cdot 0{,}65 = 143$ A i zaostaju iza odgovarajućih faznih napona (sl. 9.2.3) za ugao $\varphi_f = 23°$. Struje $I_A''$, $I_B''$ i $I_C''$, pokazane na vektorskom dijagramu, protiču kroz grane s kapacitetima. One prethode odgovarajućim faznim naponima za ugao 90°.

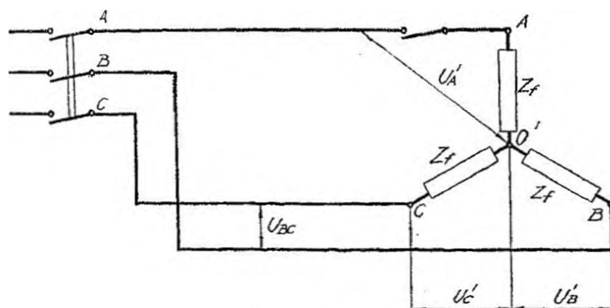
Aktivna snaga je:

$$P = 3 \cdot P_f = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \cos\varphi_f = 3 \cdot 220 \cdot 143 \cdot 0{,}92 = 87 \text{ kW}$$

odnosno:

$$P = 3 \cdot P_f = 3\,(I_f)^2 \cdot R = 3 \cdot (220)^2 \cdot 0{,}6 = 87 \text{ kW}$$

Sada ćemo videti kako će se promeniti struje i naponi u kolu pri prekidu linijskog provodnika u fazi A. Takav režim može nastati ne samo pri prekidu linije, već i u slučaju pregaranja potrošača (na sl. 9.2.4). To je uslovno pokazano kao

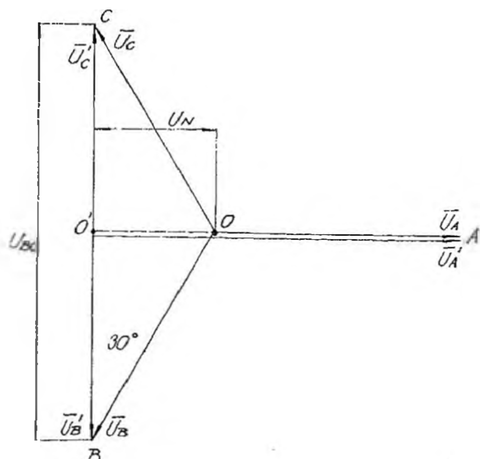



**Sl. 9.2.4**

otvoren prekidač. $Z_f$ je prividni otpor faze, uključujući istovremeno namotaj motora i kondenzatora. U dve zdrave faze vlada linijski napon $U_{BC} = 380$ V, koji se raspoređuje podjednako na dva jednaka dela $U_c'$ i $U_B'$, pošto su u tim fazama uključeni jednaki otpori $Z_f$ (sl. 9.2.4).

Na taj način, u vektorskom dijagramu (sl. 9.2.5) tačaka $O'$ (neutralna tačka potrošača) nalazi se na sredini vektora $U_{BC}$. Pošto odrezak $OO'$ sačinjava katetu, koja leži pod uglom 30°, to je napon neutralne tačke potrošača:

$$U_N = U_{OO'} = U_B/2 =$$
$$= 220/2 = 110 \text{ V}$$



Sl. 9.2.5

Iz dijagrama (sl. 9.2.5) gde su $U_A$, $U_B$, $U_C$ — fazni naponi generatora koji su konstantni, određujemo napone pri promeni opterećenja:

$$U_A' = U_N + U_A =$$
$$= 110 + 220 =$$
$$= 330 \text{ V}$$

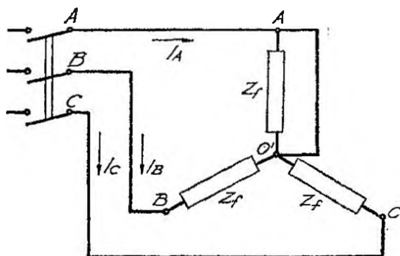
$$U_B' = U_{BC}/2 = 380/2 = 190 \text{ V}$$

$$U_C' = U_{BC}/2 = 380/2 = 190 \text{ V}$$

Struje u fazama B i C su:

$$I_B = I_C = U_B' \cdot Y_f = 190 \cdot 0{,}65 = 123 \text{ A}$$

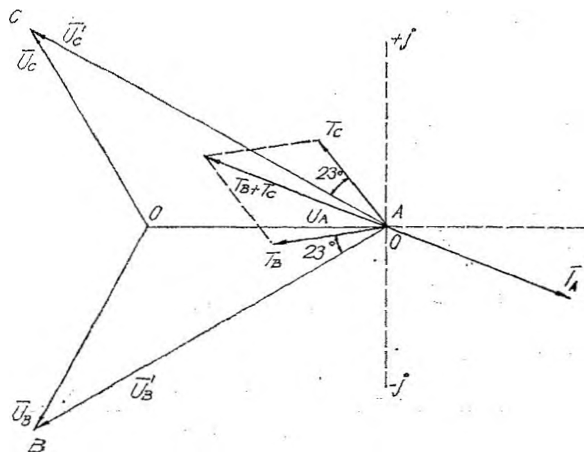
Da vidimo kako će se promeniti struje i naponi u kolu, ako dođe do kratkog spoja faze A?



Sl. 9.2.6

Tačka $O'$ (sl. 9.2.6) spojena je s tačkom $A$. U takvom slučaju naponi $U_C'$ i $U_B'$ u fazama B i C potrošača (sl. 9.2.7) postaju jednaki linijskim naponima $U_{AC}$ i $U_{BA}$, tj. povećavaju se za $\sqrt{3}$ puta. U našem slučaju dobijamo da je $U_B' = U_C' = 380$ V. Linijske struje se povećavaju za $\sqrt{3}$ puta:

$I_B = I_C = \sqrt{3} \cdot 143 = 248$ A. Vektori $I_B$ i $I_C$ (sl. 9.2.7) pomereni su u fazi prema odgovarajućim naponima za ranije izračunati ugao 23°, jer se otpori dveju pomaknutih faza nisu promenili. Uzimajući u obzir da je vektor $\bar{U}_A$ u smeru $X$ ose (sl. 9.2.7) napišimo struje u kompleksnom obliku:




Sl. 9.2.7

$$\bar{I}_B = 248 \,||-173^\circ||\, [\mathrm{A}]$$

$$\bar{I}_C = 248 \,||127^\circ||\, [\mathrm{A}]$$

Uzimajući smer struje prikazan na sl. 9.2.7 imamo:

$$\bar{I}_A = -(\bar{I}_B + \bar{I}_C)$$

i nakon sređivanja dobijamo:

$$\bar{I}_A = 427 \,||-23^\circ||\, [\mathrm{A}]$$

**2. primer:** Kako će se promeniti napon na fazama potrošača (sl. 9.2.2) iz 1. primera ako neutralne tačke $O'$ i $O''$ spojimo provodnikom, a kondenzator u jednoj fazi isključimo?

Rešenje: Uzmimo da je u fazi A isključen kondenzator. Potrošač je zbog toga postao nesimetričan. Pri tome dolazi do pomeranja neutralne tačke potrošača u odnosu na neutralnu tačku

generatora (koji na sl. 9.2.2 nije prikazan). Naponi između tačaka $O'$ i $O$, odnosno $O''$ i $O$ su:

$$\bar{U}_{O'O} = \bar{U}_{O''O} = \bar{U}_N = \frac{\bar{E}_A \cdot Y_a + \bar{E}_B \cdot Y_B + \bar{E}_C \cdot Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C}$$

gde su:

$$\bar{E}_A = \bar{U}_A = 220 \text{ [V]}$$

$$\bar{E}_B = \bar{U}_B = 220 \,||\, -120 \,||\text{ [V]}$$

$$\bar{E}_C = \bar{U}_C = 220 \,||\, 120 \,||\text{ [V]}$$

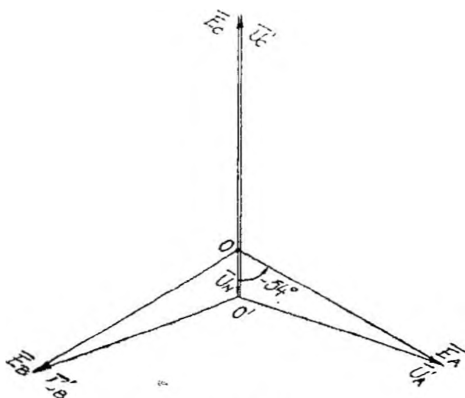
$$\bar{Y}_A = \frac{1}{R + jX_L} = \frac{1}{0{,}6 + j\,0{,}8} = (0{,}6 - j\,0{,}8) \text{ [S]}$$

$$X_B = Y_C = G_f - jB_f = (0{,}6 - j\,0{,}25) \text{ [S]}$$

Prema tome je:

$$\bar{U}_N = \frac{220\,(0{,}6 - j\,0{,}8) + 220\,||-120\,||\,(0{,}6 - j\,0{,}25) + 220\,||\,120^\circ\,||\,(0{,}6 - j\,0{,}25)}{0{,}6 - j\,0{,}8 + 0{,}6 - j\,0{,}25 + 0{,}6 - j\,0{,}25} =$$

$$= 31{,}5 - i\,43{,}6 = 54 \,||\, -54 \,||\text{ [V]}$$




Sl. 9.2.8

U tom slučaju napon na fazi A potrošača (sl. 9.2.8) iznosi:

$$\bar{U}_A' = \bar{E}_A - \bar{U}_A =$$

$$= 220 - 31{,}5 + j\,43{,}6 =$$

$$= (188{,}5 + j\,43{,}6) \text{ [V]}$$

ili

$$U_A' = \sqrt{188{,}5^2 + 43{,}6^2} =$$

$$= 191 \text{ V}$$

Analognim postupkom izračunamo i druge fazne napone i dobijamo:

$U_B' = 195$ V i $U_C' = 273$ V

### 9.2.3. Zadaci za samostalno rešavanje

1. Na mrežu trofazne struje. linijskog napona $U_L = 380$ V, uključena su u zvezdu tri potrošača. Aktivni otpor svakog potrošača je $R = 30\,\Omega$, a induktivni $X_L = 40\,\Omega$. Kolike su fazne $I_f$ i linijske $I_L$ struje?

2. U četvoropžičnu mrežu trofazne struje linijskog napona $U_L = 220$ V potrebno je uključiti osam električnih sijalica proračunatih za napon $U_f = 127$ V. Sijalice imaju snage: četiri po 100 W, dve po 50 W, jedna 75 W i jedna 25 W. Rasporediti sijalice u grupe i nacrtati šemu. Izračunati struju $I_f$ u svakoj fazi. Izračunati struju $I_N$ u neutralnom provodniku pri isključenju sijalice snage 100 W, 50 W i 25 W.

3. U trožičnoj mreži linijskog napona 380 V spojena su u zvezdu tri otpora $Z_A = Z_B = Z_C = 40\,\Omega$. Faktor snage u svakoj fazi iznosi 0,9. Izračunati struje u svim provodnicima mreže i nacrtati u razmeri vektorski dijagram.

4. Trofazni električni motor, spojen u zvezdu, razvija mehaničku snagu od 6 kW. Stepen iskorišćenja motora je 0,8, a njegov $\cos\varphi = 0{,}85$. Linijski napon mreže je 380 V. Sastaviti ekvivalentnu šemu motora i izračunati struje u linijskim provodnicima. Nacrtati u razmeri vektorski dijagram.

5. Sa trofazne mreže s aktivnim otporom vodova $0{,}2\,\Omega$ i induktivnim $0{,}8\,\Omega$ napaja se električni motor spojen u zvezdu. Snaga motora je 12 kW, a njegov $\cos\varphi = 0{,}87$. Linijski napon je 380 V. Odrediti pad i gubitak napona u vodu. Nacrtati vektorski dijagram.

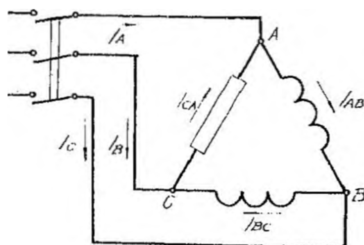
6. Tri aktivna otpora po $20\,\Omega$ spojena su u zvezdu linijskog napona 380 V. U fazi A došlo je do prekida linijskog provodnika. Izračunati sve linijske struje pre i posle prekida.

7. Tri aktivna otpora po $20\,\Omega$ spojena su u zvezdu linijskog napona 220 V. U fazi B je došlo do kratkog spoja. Izračunati struje u linijskim provodnicima pre i posle kratkog spoja. Nacrtati vektorski dijagram.

## 9.3. TROFAZNA KOLA S POTROŠAČIMA SPOJENIM U TROUGAO

### 9.3.1. Osnovni pojmovi i formule

1. Trouglom (sl. 9.3.1) nazivamo takav spoj kod koga kraj faze A spajamo s početkom faze B, kraj faze B s početkom faze C i kraj faze C s početkom faze A.




Sl. 9.3.1

2. Pri spoju u trougao linijski naponi jednaki su faznim:

$$U_L = U_f \tag{9.3.1}$$

3. Fazne struje možemo izračunati prema izrazima:

$$I_{AB} = \frac{U_{AB}}{Z_{AB}} [A] \quad I_{BC} = \frac{U_{BC}}{Z_{BC}} [A] \quad I_{CA} = \frac{U_{CA}}{Z_{CA}} [A] \tag{9.3.2}$$

4. Linijske struje pri simetričnom opterećenju iznose:

$$I_L = \sqrt{3} \cdot I_f \tag{9.3.3}$$

a pri nesimetričnom možemo ih izračunati kao geometrijsku razliku faznih struja:

$$\begin{aligned} \bar{I}_A &= \bar{I}_{AB} - \bar{I}_{CA} \\ \bar{I}_B &= \bar{I}_{BC} - \bar{I}_{AB} \\ \bar{I}_C &= \bar{I}_{CA} - \bar{I}_{BC} \end{aligned} \tag{9.3.4}$$

5. Snage trofaznog kola pri simetričnom opterećenju su: aktivna snaga:

$$P = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \cos\varphi \,[W] \text{ ili } P = \sqrt{3}\, U_L \cdot I_L \cdot \cos\varphi \,[W] \tag{9.3.5}$$

reaktivna snaga:

$$Q = 3 \cdot U_f \cdot I_f \cdot \sin\varphi \,[VAr] \text{ ili } Q = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L \cdot \sin\varphi \,[VAr] \tag{9.3.6}$$

prividna snaga:

$$S = 3 \cdot U_f \cdot I_f [VA] \text{ ili } S = \sqrt{3} \cdot U_L \cdot I_L [VA] \tag{9.3.7}$$

Pri nesimetričnom opterećenju snaga trofaznih trošila spojenih u trougao je:

$$P = P_{1f} + P_{2f} + P_{3f} = U_f \cdot I_{f1} \cdot \cos\varphi_1 + U_f \cdot I_{f2} \cdot \cos\varphi_2 +$$
$$+ U_f \cdot I_{3f} \cdot \cos\varphi_3 \text{ [W]} \qquad (9.3.8)$$

gde je:

$$\cos\varphi_1 = \frac{R_1}{Z_1} \cos\varphi_2 = \frac{R_2}{Z_2} \cos\varphi_3 = \frac{R_3}{Z_3}$$

reaktivna snaga:

$$Q = Q_{1f} + Q_{2f} + Q_{3f} = U_f \cdot I_{f1} \cdot \sin\varphi_1 + U_f \cdot I_{2f} \cdot \sin\varphi_2 +$$
$$+ U_f \cdot I_{3f} \cdot \sin\varphi_3 \text{ [VAr]} \qquad (9.3.9)$$

gde je:

$$\sin\varphi_1 = \frac{X_1}{Z_1} \sin\varphi_2 = \frac{X_2}{Z_2} \sin\varphi_3 = \frac{X_3}{Z_3}$$

prividna snaga:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \text{ [VA]} \qquad (9.3.10)$$

### 9.3.2. **Primeri**

**1. Primer:** Između linijskih provodnika $A$ i $B$ i $B$ i $C$ (sl. 9.3.1) uključena su dva jednaka potrošača aktivne snage $P_{AB} = P_{BC} = 70$ kW i faktora snage 0,92 (induktivni karakter). Kod trećeg potrošača, uključenog između provodnika $C$ i $A$, faktor snage je $\cos\varphi = 1$, a njegova aktivna snaga $P_{CA} = 30{,}4$ kW. Odrediti fazne i linijske struje, a takođe i aktivnu snagu kola, ako je linijski napon 380 V.

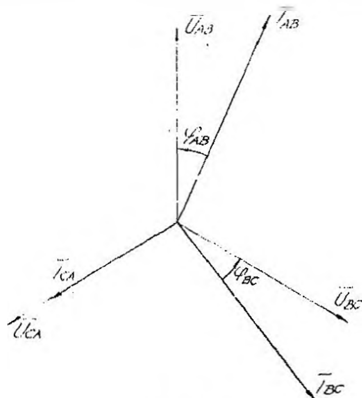
Rešenje:

1. Izračunavanje faznih struja.

Vidimo da su između $A$, $B$ i $B$, $C$ uključeni jednaki potrošači, pa imamo:

$$I_{AB} = I_{BC} = \frac{P_{AB}}{U_{AB} \cdot \cos\varphi_{AB}} = \frac{70 \cdot 10^3}{380 \cdot 0{,}92} = 200 \text{ A}$$

Svaka od tih struja zaostaje u fazi za ugao $\varphi_{AB}$ = arccos 23° iza odgovarajućih napona kako je to prikazano na vektorskom dijagramu (sl. 9.3.2).



Sl. 9.3.2

Struja treće faze je:

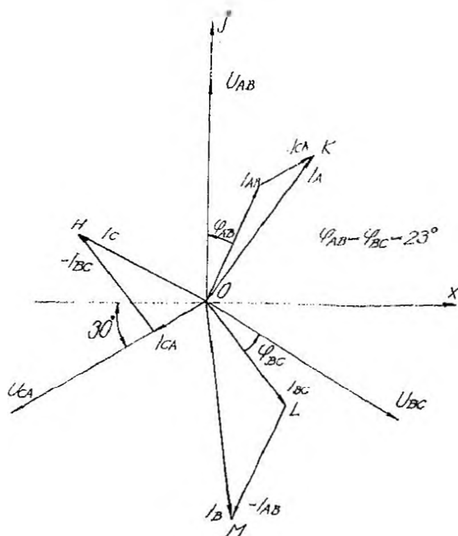
$$I_{CA} = \frac{P_{CA}}{U_{CA} \cdot \cos \varphi_{CA}} =$$

$$= \frac{30{,}4 \cdot 10^3}{380 \cdot 1} = 80 \text{ A}$$

a vektor struje se poklapa u pravcu s vektorom $U_{CA}$ pošto je $\cos \varphi_{CA} = 1$.

2. Izračunavanje linijskih struja.

Prema izrazu (9.3.4) možemo linijske struje naći kao geometrijsku razliku faznih struja. Usvajajući za razmeru struja $M_i = 9$ A/mm, nalazimo na dijagramu (sl. 9.3.3):



Sl. 9.3.3

$$I_A = (OK)\, M_i =$$
$$= 29{,}8 \cdot 9 = 268 \text{ A}$$

$$I_B = (OM)\, M_i =$$
$$= 38{,}5 \cdot 9 = 346 \text{ A}$$

$$I_C = (OH)\, M_i =$$
$$= 24{,}8 \cdot 9 = 224 \text{ A}$$

Linijske struje mogu se izračunati i analitički (2. primer).

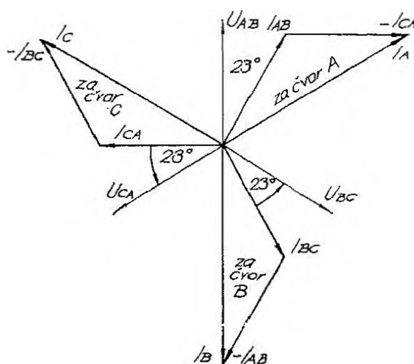
3. Izračunavanje aktivne snage.

Aktivna snaga celog kola je:

$$P = P_{AB} + P_{BC} + P_{AC} = 70 + 70 + 30{,}4 = 170{,}4 \text{ kW}$$

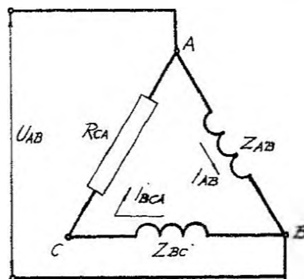
**2. primer:** U kom slučaju (1. primer) će sve linijske struje biti jednake? Kako će se promeniti fazne struje i naponi pri slučajnom prekidu linijskog voda? Kako ćemo izračunati (analitički) struje iz 1. primera?

Rešenje: Ako uključimo u fazu $AC$ isti potrošač ($P_{CA} = 70$ kW, $\cos \varphi_{CA} = 0{,}92$) kao i u drugim fazama, to će sve fazne struje biti jednake: $I_f = I_{AB} = I_{BC} = I_{CA} = 200$ A, i zaostajaće za ugao $\varphi_f = 23°$ iza odgovarajućih linijskih napona (oni su ujedno i fazni naponi). Pri tome su, kako sledi iz trougla struja za čvor $A$, $B$, $C$ (sl. 9.3.4) linijske struje: $I_L = I_A = I_B = I_C = \sqrt{3} \cdot 200 = 346$ A, a svaka od njih zaostaje u fazi za ugao 30° iza odgovarajućih faznih struja. To bi bio slučaj kod simetrično opterećenih potrošača spojenih u trougao.




Sl. 9.3.4

Ako odvojimo linijski vod, na primer od čvora $C$ (sl. 9.3.5), struja $I_{AB}$ ostaje ista. Za određivanje struje $I_{BCA}$ izračunajmo pre svega otpore faza.




Sl. 9.3.5

Otpor $BC$ je:

$$Z_{BC} = \frac{U_{BC}}{I_{BC}} = \frac{380}{200} = 1{,}9\ \Omega$$

Njegova aktivna i reaktivna komponenta su:

$$R_{BC} = Z_{BC} \cdot \cos \varphi_{BC} = 1{,}9 \cdot 0{,}92 = 1{,}75\ \Omega$$

$$X_{BC} = Z_{BC} \cdot \sin \varphi_{BC} = 1{,}9 \cdot 0{,}39 = 0{,}74\ \Omega$$

Otpor faze $CA$ je:

$$R_{CA} = \frac{U_{CA}}{I_{CA}} = \frac{380}{80} = 4{,}75\ \Omega$$

Ukupna aktivna i reaktivna komponenta su:

$$R_{BCA} = R_{BC} + R_{CA} = 1{,}75 + 4{,}75 = 6{,}5\ \Omega$$

$$X_{BCA} = X_{BC} = 0{,}74\ \Omega$$

Prividni otpor grane *BCA* je:

$$Z_{BCA} = \sqrt{R_{BCA}^2 + X_{BCA}^2} = \sqrt{6{,}5^2 + 0{,}74^2} = 6{,}51\ \Omega$$

Struje u fazama *BC* i *CA* (sl. 9.3.5) su:

$$I_{BCA} = \frac{U_{BCA}}{Z_{BCA}} = \frac{380}{6{,}51} = 58\ \text{A}$$

a naponi na fazama iznose:

$$U_{CA}' = R_{CA} \cdot I_{BCA} = 4{,}75 \cdot 58 = 275\ \text{V}$$

$$U_{BC}' = Z_{BC} \cdot I_{BCA} = 1{,}9 \cdot 58 = 110\ \text{V}$$

Na kraju, izračunajmo (analitički) linijske struje.

Prema vektorskom dijagramu (sl. 9.3.3) izrazimo u kompleksnom obliku fazne struje:

$$\bar{I}_{BA} = 200\, e^{j67} = (78 + j\,184\ [\text{A}]$$

$$\bar{I}_{CC} = 200\, e^{-j53^\circ} = (120 - j\,160)\ [\text{A}]$$

$$\bar{I}_{CA} = 80\, e^{-j150^\circ} = (-69{,}3 - j\,40\ [\text{A}]$$

Linijsku struju $\bar{I}_A$ odredićemo, sastavivši jednačinu po prvom Kirhofovom zakonu za čvor *A*:

$$\bar{I}_A = \bar{I}_{AB} - \bar{I}_{CA} = 78 + j\,184 + 69{,}3 + j\,40 = (147{,}3 + j\,224)\ [\text{A}],$$

odakle je:

$$I_A = \sqrt{147{,}3^2 + 224^2} = 268\ \text{A}$$

Analogno za čvorove *B* i *C* dobijamo:

$$\bar{I}_B = \bar{I}_{BC} - \bar{I}_{AB} = 120 - j\,160 - 78 - j\,184 = (42 - j\,344)\ [\text{A}]$$

ili

$$I_B = \sqrt{42^2 + 344^2} = 346\ [A],$$

$$\bar{I}_C = \bar{I}_{CA} - \bar{I}_{BC} = -69{,}3 - j\,40 - 120 + j\,160 =$$

$$= (-189{,}3 + j\,120)\ [A]$$

ili

$$I_C = \sqrt{189{,}3^2 + 120^2} = 224\ [A]$$

### 9.3.3. **Zadaci za samostalno rešavanje**

1. Tri jednaka aktivna otpora po 5,5 Ω spojena su u trougao i uključeni u mrežu trofazne struje s linijskim naponom 220 V. Izračunati fazne i linijske struje, snagu svake faze i celog kola. Nacrtati vektorski dijagram.

2. U svakoj fazi potrošača spojenih u trougao, struja zaostaje u fazi iza napona za ugao 53°. Otpori faza su jednaki i iznose po 19 Ω. Izračunati fazne i linijske struje, aktivnu snagu svake faze i celog kola, ako je linijski napon 380 V. Nacrtati vektorski dijagram.

3. Tri svitka, svaki sa aktivnim otporom $R = 1{,}5\ \Omega$ i induktivitetom $X_L = 2\ \Omega$, spojena su u trougao na trofaznu mrežu linijskog napona 220 V. Izračunati fazne i linijske struje i aktivnu snagu celog kola. Nacrtati vektorski dijagram.

4. Električne sijalice spojene su u trougao na trofaznu mrežu linijskog napona 220 V. Ukupna snaga sijalica po fazama iznosi: 550, 1100 i 22000 W. Izračunati fazne i linijske struje.

5. Na trofaznu mrežu linijskog napona 220 V priključen je trougao potrošača koji imaju jednake aktivne snage po 76 kW, ali s raznim faktorima snage: $\cos\varphi_{AB} = 0{,}8$, $\cos\varphi_{BC} = 0{,}9$, $\cos\varphi_{CA} = 0{,}85$. Izračunati fazne i linijske struje i nacrtati vektorski dijagram, uzimajući uglove $\varphi_{AB}$, $\varphi_{BC}$ i $\varphi_{CA}$ pozitivnim.

6. Prema uslovima iz 5. zadatka sastaviti ekvivalentnu šemu kola uzevši da je $\varphi_{AB} > 0$, $\varphi_{BC} > 0$ i $\varphi_{CA} < 0$!.

7. Tri jednaka otpora $Z = 10\ \Omega$ spojena su u trougao i priključena na mrežu linijskog napona 220 V. Struje u fazama pomaknute su u odnosu na odgovarajuće napone za uglove: $\varphi_{AB} = 0$, $\varphi_{BC} = -90°$ $\varphi_{CA} = 90°$. Izračunati fazne i linijske struje i aktivnu snagu celog kola. Nacrtati vektorski dijagram.

8. Tri aktivna otpora spojena su u trougao i napajaju se s trofazne mreže sa $U_L = 220$ V. Struje u fazama su: $I_{AB} = 100$ A, $I_{BC} = 150$ A, $I_{CA} = 220$ A. Izračunati linijske struje i snagu celog kola.

9. U trofaznoj mreži, linijskog napona 220 V, spojene su u trougao električne sijalice. Snage sijalica su: u fazi AB 2200 W, u fazi *BC* 550 W i u fazi CA 1000 W. U mreži je došlo do prekida linijskog voda faze C. Izračunati fazne napone i linijske struje uzimajući otpor sijalica nepromenjenim.

10. Tri jednaka potrošača s otporima po 30 Ω spojena su u trougao i uključena na mrežu trofazne struje linijskog napona 380 V. Pri kolikim otporima potrošača spojenih u zvezdu linijske struje ostaju po vrednosti iste kao i u spoju trougla?

# ODGOVORI

**Odgovori na 1.1.**

**1.** 0,96 N

**2.** 5,3 cm.

**3.** $1{,}041 \cdot 10^{-6}$ C.

**4.** 3,64 $m^2$.

**5.** $80 \frac{kV}{m}$.

**6.** 1 cm.

**7.** 6424 m.

**8.** $R_1 : R_2 = 4$.

**9.** $20 \frac{V}{m}$.

**10.** $35 \cdot 10^{-4}$ Ws.

**11.** $120 \frac{kV}{m}$ ; 012 N.

**12.**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| [R[m] | 0 | 0,425 | 0,85 | 1,70 |
| $K\left[\frac{Vk}{m}\right]$ | 0 | 500 | 125 | 31,25 |
| $\varphi$ [kV] | 212,5 | 212,5 | 106,25 | 53,125 |

**Odgovori na 1.2.**

**1.** 9 568 pF.

**2.** 0,02 mm.

**3.** 8,85 C.

**4.** 11.300 V.

**5.** 10 nF.

**6.** 0,318 mm.

**Odgovori na 1.3.**

**1.** 21 $\mu$ F.

**2.** 60 pF; 4900 pF.

**3.** 8 $\mu$ F; 0,5 $\mu$ F.

**4.** 2 $\mu$ F.

**5.** 0,0288 J; 0,72 J.

**6.** 1 200 pF; 1 000 pF.

7. $99{,}88 \cdot 10^{-6}$ As; 19,98 V; 199,8 V.

8. 240 pF. 9. 1,05 $\mu$ F. 11. 2,2 $\mu$ F; 140 V; 60 V.

10. 200 V; 300 V; 100 V; 12. 0,12 A.

13. $C_{12} = C_{13} = C_{23} = 0{,}125\ \mu$ F; $C_{12-3} = C_{23-1} = 0{,}167\ \mu$ F.

14. 3,3 $\mu$ F; 50 V; 100 V; $1{,}25 \cdot 10^{-12}$ J; $2{,}5 \cdot 10^{-2}$ J.

15. 4,95 $\mu$ F; 121 V; 99 V; 484 $\mu$ C; 605 $\mu$ C; 1089 $\mu$ C.

16. 2; 3; 1; 1,2; 0,75; 4; 5; 7; 1,71; 1,43 4 i 2,3 $\mu$ F.

17. 0,54 $\mu$ F. 19. 25 pF.

18. 0,43 $\mu$ F. 21. 55—326 pF.

22. $C_1 = 350$ pF; $C_3 = 35$ pF.

23. $24 \cdot 10^{-6}$ C; $8 \cdot 10^{-6}$ C; $8 \cdot 10^{-6}$ C; $8 \cdot 10^{-6}$ C; 12 V; 8 V; 8 V;

24. 600 V.

25. 0,82 $\mu$ F; $0{,}82 \cdot 10^{-4}$ C; $0{,}54 \cdot 10^{-4}$ C; $0{,}28 \cdot 10^{-4}$ C; $0{,}28 \cdot 10^{-4}$ C.

26. $16{,}6 \cdot 10^{-3}$ J; $1{,}66 \cdot 10^{-3}$ J.

27. $\frac{W_2}{W_1} = 1{,}66.$ 28. 600 V; $300 \cdot 10^{-6}$ C.

29. 2 kV; 1,2 kV; $3 \cdot 10^4$ pF; $2 \cdot 10^4$ pF.

30. $3 \cdot 10^{-3}$ J; 20 V; 8 V; 12 V.

31. $1{,}24 \cdot 10^{-3}$ J; $1{,}5 \cdot 10^{-3}$ J.

**Odgovori na 2.1.**

1. 0,45 Ah. 4. $100 \cdot 800$ C; 2,8 A; 0,2 A

2. 50 mA. 3. 1,5 h. 5. 432 C.

**Odgovori na 2.2.**

1. 0,00024 Ω. 9. 0,7 Ω.

5. 50 mm²; 8,4 Ω. 10. Al.

6. 78,5 mm², 0,018 Ω. 11. 10 mm².

7. 0,285 Ω. 12. 40 Ω.

8. 0,1 Ω 13. 48 Ω 14. 500 m.

15. $S_{Al} = 300$ mm² $S_{Fe} = 56$ mm² $R_{Al} = 1{,}04\ \Omega$; $R_{Fe} = 23{,}9\ \Omega$.

16. 0,03 Ω.

17. 52,5 cm.

18. 0,000743 Ω.

19. 0,35 Ω.

20. 48° C.

21. 2443° C.

22. 1564 Ω; 1836 Ω.

23. 65° C.

24. 5,46 Ω.

25. 0,3 Ω.

**Odgovori na 2.3.**

1. 18 C.
2. 640 mA
3. 6 MΩ.
4. 2,5 m.
5. 0,075 A; 0,00425 A; 1,34 Ah.
6. 20 mA.
7. 213 V.
8. 25 mm².
9. 70 mm².

**Odgovori na 2.4.**

1. 100 W; 600 wh.
2. 1210 Ω.
3. $R_1 = 80\ \Omega$; $R_2 = 240\ \Omega$; $I_1 = 1{,}58$ A; $I_2 = 0{,}91$ A.
4. 1,58 A; 80 Ω; 9 dinara.
5. 43 Ω; 400 W; $1440 \cdot 10^3$ J
6. 1,64 m.
7. 5,6 A; 112,4 V.
8. 4,9 kW; 3,3 Ω; 21 m.
9. 97 Ω.
10. 0,11 dinara, 100 Ω, $1728 \cdot 10^3$ J.
11. 3,3 m; $1260 \cdot 10^3$ J; 0,35 kWh.
12. 91%.
13. $180 \cdot 10^3$ J.
14. 3450 W; 3270 W.
15. 12,2 A.
16. 8,8 m.
17. $42 \cdot 10^3$ cal.

**Odgovori na 2.5.**

1. 1,81 V; 10,9 V.
2. 5 A; 2 V.
3. 12 elemenata; 12,5 Ah.
4. 9 V; 3 A; 1,4 V 0,5 A.
5. 2 V.
6. 3650 Ω.
7. 0,15 A; 666 h.

**Odgovori na 3.1.**

1. 6 A; 1,2 V; 6 V; 24 V; 24 V; 4,8 V; 58,8 V; 360 W; 352,8 W; 36 W; 144 W; 144 W; 28,8 W.

2.

3. 9,6 A; 115 V; 1100 W.

4. 0,6 Ω.

5. 60 Ω, 11,2 Ω.

6. 10 Ω.

7. 10 Ω.

8. 192 W; 2 A; 34 Ω.

9. 176 V.

10. 1200 Ω; 0,5 A.

11. 338 Ω; 91 Ω.

12. 33 Ω.

13. 176 V; 44 V.

14. 60 V; 160 V.

15. Na stezaljkama pregorele sijalice voltmetar će pokazivati napon U, a na ostalim nulu.

16. Kratko spajamo provodnikom jednu po jednu sijalicu. Kad kratko prespojimo pregorelu sijalicu zasvetleće sve sijalice.

17. 12 Ω; 18 Ω; 30 Ω.

18. 24 V; 20 Ω.

19. 45 V; 37,5 V; 7,5 Ω.

20. $R_n : R_n$ = 1 : 9.

21. 4 Ω.

22. 36 V.

23. 2 A; 48 V.

**Odgovori na 3.2.**

1. 0,6 A; 24,6 V; 16,8 V; 6 V; 47,4 V; 14,76 W; 10,08 W; 3,6 W; 28,8 W; $E_1$—izvor; $E_2$—potrošač.

2. $U_2$ se povećava, $U_1$ i $U_3$ smanjuju.

3. $\varphi_A = 30$ V; $\varphi_B = 20$ V; $\varphi_C = 1{,}55$ V; $\varphi_D = 3{,}5$ V; $\varphi_E = 1{,}0$ V; $\varphi_F = 10$ V.

4. $\varphi_A = \varphi_B = \varphi_C = 30$ V; $\varphi_D = \varphi_E = 18$ V; $\varphi_E = 30$ V.

5. $\varphi_B = 0$; $\varphi_C = 90$ V; $\varphi_D = 96$ V; $\varphi_E = 107$ V; $\varphi_F = 198$ V; $\varphi_G = 209$ V; $U_{GD} = 113$ V; $V_{FB} = 198$ V.

6. 80 Ω $\varphi_0 = -16$ V.

7. Na otporu $R_3$: 286 Ω.

**Odgovori na 4.1.**

1. 1,44 Ω; 83,5 A.

2. 11,25 Ω; 0,54 A; 3,2 W.

3. 4,13 A.

4. 9 A.

5. 24 A; 10 A; 6 A.

6. $R_1 = 2{,}5\, R_2$.

7. 0,0015 Ω. 8. 2 Ω. 10. 28 Ω; 72 Ω.

9. 2 Ω; 8 Ω. 11. 39,4 Ω; 1,27 Ω.

12. 100 W; 200 W; 0,45 A; 1,36 A.

**Odgovori na 4.2.**

1. 2 A; 3 A; 5 A; 49,5 V; 10 V; 0,6 V; 37,5 V; 1,4 V; 247,5 W; 50 W; 1,2 W; 1,8 W; 187,5 W; 7,0 W.

2. 12 A; 9,6 A; 2,4 A; 58,8 V; 48 V.

3. 204 V.

4. 2,7 A; 68 Ω; 102 Ω; 5,4 A; 2974 W.

5. 240 Ω; 1,37 A. 7. 125 V.

6. 11,1 Ω. 8. 0,555 Ω.

9. a) od 0—240 V; b) od 80 do 240 V.

10. 80 V.

11. 30 A; 20 A; 18 kW; 12 kW; 45 kW.

12. 10 A; 6 A; 4 A; 1,25 kW.

13. 3,6 A; 12 A; 8,4 A; 7 A; 1,4 A; 1440 W; 43 W; 1397 W.

14. 91 Ω.

15. 0,6 A; 0,3 A; 0,12 A; 0,18 A; 3,6 V.

**Odgovori na 4.3.**

1. dve; 24 Ω; 5 A; 1 A; 120 V.

2. $$R = R_1 + R + R_2 \frac{\left(\frac{R_3 \cdot R_5}{R_3 + R_5} + R_6\right) \cdot R_4}{\frac{R_3 \cdot R_5}{R_3 + R_5} + R_6 + R_4} = 15\ \Omega.$$

3. 20 Ω.

4. 6 A; 3 A; 1,8 A; 1,2 A.

5. $$R = \frac{(R_1 + R_4)\, R_2}{R_1 + R_4 + R_2} + \frac{(R_3 + R_5)\, R_6}{R_3 + R_5 + R_6} = 1{,}6\ \mathrm{k}\Omega;$$

22,6 mA; 9 mA; 13,65 mA; 11,25 mA; 11,25 mA.

6. 0,3 A; 0,2 A; 0,165 A; 0,335 A; 0,5 A.

7. 120 V; 400 Ω.

8. 6,25 A; 124 V.

9. 630 V.

10. 1 Ω; 5/6 Ω.

11. 2 Ω.

12. 15 Ω; 10 Ω.

13. 0,8 Ω.

14. 8,4 Ω.

15. 2,9 Ω.

16. 7 Ω; 3,2 Ω; 8,4 Ω.

17. 34,5 V; 15,5 W.

18. 32,5 W; 290 mA.

19. 55,6 Ω.

20. 5,8 V.

21. 120 Ω; 62 V.

22. 1 kΩ; 8,4 V.

23. 10,1 Ω; 1,4 A; 0,4 A; 1,0 A; 0,33 A; 0,66 A.

24. 9,6 mA; 3,2 mA; 3,2 mA; 1,6 mA; 1,6 mA; 1,28 mA; 1,92 mA; -4,8V;—7,1 V; —5,68 V.

**Odgovori na 4.4.**

1. 50 V; 10,8 A; 4,9 kW.

2. 20 V.

3. 12 V; 1,6 puta.

4. 527 V; 479 V; 455 V.

**Odgovori na 5.1.**

1. 58,8 mA.

2. 380 mA; 108 mA; 108 mA; 272 mA; 272 mA ; 0.

3. 0,5 A.

4. 0,0017 A.

5. 10 Ω; 0,06 A; 0,04 A; 0,05 A; 0,05 A; 0,01 A.

6. 2 A.

7. Pri zatvorenom prekidaču: 2,4 A; —2,85 A; 1,65 A.

**Odgovori na 5.2.**

1. 0,44 A; 0,24 A; 0,2 A.

2. 0,44 A; 0,86 A; 1,3 A.

3. 0; 0,75 A; 0,30 A; 0,45 A.

4. 2,26 A; 0,19 A; 2,07 A.

5. 34 mA; 34 mA; 0.

6. 2,92 A; 3,52 A; 0,6 A; 4,68 A; 0,6 A; 5,28 A.

7. 3,85 A (četiri struje); 7,7 A; 0;

8. 1,71 A (četiri struje); 0.

**Odgovori na 5.3.**

1. 22,4 A; 11,2 A; 11,2 A.

2. 98 mA; 244 mA; 146 mA; Drugi izvor je u režimu potrošača.

3. —0,25 A; 1,25 A; 1 A; 0,67 A; 0,33 A.

4. 21 A; 13 A; 16 A; 8 A.

5. 34 V; 2 Ω; 9 V.

6. $R_1$ — neodređeno; 20 Ω; 40 V; 44 V.

7. 135 V; 90 V; 1,8 kW; —0,5 kW.

**Odgovori na 5.4.**

1. 70 V; sve struje po 3,5 A.

2. 5,6 mA; 32,9 mA; 27,3 mA.

3. 174 V.

4. 13 MW; 13 MW.

5. 5 A; 10 A; 5 A.

6. 2 A; 5 A; 15 A; 18 A.

7. a) 200 A; 100 A; 100 A; b) 166,5 A; 233,5 A; c) 472 V; 0,08 Ω.

8. 5 A; 2 A.

9. 9,1 V.

10. 1,67 A.

11. a) 0; 220 V; 220 V; b) 17,6 A; 215 V; 236 V.

**Odgovori na 5.5.**

1. 25 A.

2. 0,2 A.

3. 0,69 A.

4. 0,8 V.

5. a) 1,49 Ω; 120,6 V; b) 0,67 A; 7,33 A; 121,1 V.

6. 2,4 kΩ; 2,56 kΩ.

7. 230 V; 210 V.

8. 115 V; 6 *S*.

9. 150 V; 135 V.

**10.** 0,25 A; 100 V; 200 Ω.

**11.** Za shemu 5·5·8:50 A; 50 A; 0; 100 A.
Za shemu: 5·5·9:50 A; 150 A; 100 A; 100 A.

**12.** Za shemu 5·5·8:50 A; 0; 0; 50 A.
Za shemu 5·5·9:sve struje po 50 A.

**13.** 18,75 A; (tri struje); 9,75 A.

**14.** 40,8 A; 6,8 A; 34,0 A; 14,8 A; 19,2 A.

**Odgovori na 6.1.**

**1.** 1,875 N.

**2.** 1 T.

**3.** 1 N.

**4.** 1 T.

**5.** 1,8 N.

**6.** 0,2.

**7.** 10 A.

**8.** 3,46 N.

**9.** 0,93 m.

**10.** 5,65 A/m.

**11.** 3,14 A.

**12.** 5,5 A/m.

**13.** 251 A.

**14.** 14,74 A/m; 18,5 G; 3,2 Mx.

**15.** 2,07 A.

**16.** 14,9 A/m, 18,7 G; 19,4 Mx.

**17.** $IW = 966$ A.

**18.** 16,44 A/cm; 20,6 G; 101 Mx.

**19.** 120 A/m.

**20.** 300.

**21.** 500 A/m.

**22.** 2512.

**23.** 37,6 A

**24.** 3000.

**25.** 0,55 T.

**26.** $u = 250$; $B = 12500$ G.

**27.** 1,695 T.

**28.** 470 $10^{-3}$ Wb.

**29.** 1 A.

**Odgovori na 6.2.**

**1.** 0,5 A; 870.

**2.** 0,74 A.

**3.** 1,2 T; 520 navojaka.

**4.** 1,3 A

**5.** 658 A.

**6.** $4,2 \cdot 10^5$ 1/H.

**7.** 393 A.

**Odgovori na 6.3.**

1. 72,6 mA.

2. 0,0063 Wb; 1050 A.

3. 280 A.

**Odgovori na 6.4.**

1. 970 A; 710 A.

2. 195,8 A; 97,5 A.

**Odgovori na 6.5.**

1. 12 V.
2. 0,01 V.
3. 0,002 Wb/S.
4. 2 V.
5. 200; 1 H.
6. 3,75 V.
7. 2 m/S.
8. 5,2 V.
9. 0,00814150 Wb = 814150 Mx.
10. 3,4 V.
11. 20 A.
12. 20 V; 3,6 H; 1,8 Ws.
13. 0,0064 H.
14. 173; 2,85 H.
15. 24 H, 0,0092 H.
16. 0,147 H.
17. 0,0235 H.
18. 0,001 V.
19. 4 H.
20. 3 V; 1,2 H.
21. 0,02355 H.
22. 0,4 do 0,52 A.
23. Smanjilo približno 1000 puta.
24. $2{,}55 \cdot 10^{-2}$ H.
25. 0,6 H.

**Odgovori na 7.1.**

1. $e = 7 \sin \alpha$.

2. $T = 0{,}02$ s; $p = 1$; $\omega = 314$ l/s; $\omega p = 314$ l/s.

3. 25 Hz; 20 Hz; $10^4$ Hz; $10^8$ Hz; $10^{10}$ Hz; 157 l/s; 314 l/s; 6,28 l/s; $6{,}28 \cdot 10^8$ l/s; $6{,}28 \cdot 10^{10}$ l/s.

4. 180°.

5. 0 A.

6. 0; 219; 310; 219; 0; 219; 310; 219; 0.

7. 50 Hz; 0.02 s; 314 1/s; 314 1/s.

8. 75 o/m; 314 1/s; 7,85 1/s.

9. 0,02 s; $10^{-8}$ s.

10. $10^{-5}$ s; $0{,}33 \cdot 10^{-1}$ s.

11. 12000 o/m; $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ s; 2512 1/s; 1256 1/s.

12. 127 V; 220 V; 200 Hz; 400 Hz; $5 \cdot 10^{-3}$ s; $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ s.

13. $I_m = 0$.

14. $180 \sin \omega t$; $i = 10 \sin (\omega t - 45^\circ)$.

15. 310 V.

16. $i = 20 \sin \omega t$; $u_1 = 200 \sin (\omega t + 90^\circ)$; $u_2 = 315 \sin (\omega t - 90^\circ)$;

17. $u = 310 \sin \omega t$; $i_1 = 30 \sin (\omega t + 90^\circ)$; $i_2 = 42 \sin (\omega t - 45^\circ)$.

18. 70,5 A.

19. 157 mA; 111 mA.

20. 1000 V; 898 V.

21. 217,9 V; 154,5 V; 8° 25′; 120,7 V; 85,6 V; 35° 45′; 236,5 V; 153,1 V; 32° 30′; 270 V; 191,5 V; 22°; 51,9°; 36,8 V; 20° 30′.

**Odgovori na 7.2.**

1. 0,454 A; 0,361 A; 0,402 A; 100 W.

2. 6 A; 8,46 A; 5,38 A; 720 W; 240 Wh; 0,06 N. d; $i = 169{,}2 \sin 314t$, 8,47 sin 314t.

3. 0,59 A; 215 Ω.

4. 5 A; 4,5 A; 7,05 A; $1{,}25 \cdot 10^{-3}$ s; 500 W.

5. 240 Ω, 60 W.

6. 50 Hz, 314/s, 5 A; $7 \sin (314t + 120^\circ)$; $169 \sin (314t + 120^\circ)$.

7. 17,3 Ω.

8. 220 V; 22 Ω.

9. $I = 20$ A; $I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = 6{,}67$ A; $I_5 = I_6 = 13{,}33$ A.

**Odgovori na 7.3.**

1. 5 A; 250 VAr; 7,8 Ws; $i = 5 \sin (314t - \pi/2)$; $e = 100 \sin (314t$ $\pi($

2. 63,7 mH.

3. 5 Ω; 10 Ω; 15 Ω; 20 Ω; 24 A; 12 A; 8 A; 6 A; 2880 VAr; 1440 VAr; 960 VAr; 720 VAr.

4. 4 A; 125,6 V; 50 Hz; 0,0056 Wb.

5. 50 Hz.

6. 0,47 H.

7. 2,07 A; 2,92 A.

8. $i = 3 \sin (\omega t = 60°)$.

9. 181 V.

10. $i = 6 \sin (314\ t - 40°)$; 95,5 mH.

11. 769 Hz.

**Odgovori na 7.4.**

1. 2,4 A; 0,6; 53°; 288 VA; 173 W; 230 VAr; 96 V; 72 V.

2. $14{,}7 \cdot 10^{-3}$ H; 3,84 Ω.

3. 15,9 mH.

4. 1 Ω; 5,53 mH.

5. 5,15 Ω; 34,6 mH.

6. 24 Ω; 76,5 mH; 26 Ω; 62,5 W; 0,385; 67,4°).

7. 240 Ω; 240,2 Ω; 0,271 A; 0,734 W; 0,0416; 87,6°.

8. 400 rad/s; 63,7 Hz; 0,6; 240 V 320 V.

9. 15 Ω; 47,7 mH.

10. 6250 W; 389 W; 225 W.

11. 63,8 Ω.

12. 4570 V; 54900 W; 0,6.

13. $u = 100 \sin (\omega t - 7°)$ V; $i = 16 \sin (\omega t - 7°)$ A; $X_2 = 4$ Ω.

14. 6200 V; 190 A; 1092 kW; 90%.

15. 5,7 A; 650 W; 390 W; 260 W.

**16.** 119 A; 600 kW.

**17.** 6,6 kV; 621 V; 600 V; 0,152 H; 0,021 H; 0,173 H.

**18.** 31,5 mH; 60 V; 99,2 V; 0,567.

**Odgovori na 7.5.**

**1.** 0,8 A; 50 Hz; 102 VAr; 0,32 Ws.

**2.** 121 A; 65 Fμ.

**3.** $\infty$; 50 Ω; 25 Ω; 12; 5 Ω; 5 Ω.

**4.** 50 Hz.

**5.** 5,09 μF.

**6.** 12,7 μF.

**7.** 160 Ω; 0,75 A; 1,05 A.

**8.** 40 Ω.

**9.** 334 A; 57 μF; 0,8 Ws;

**10.** 1280 μF; 91,4 μF; 34,8 Ω.

**Odgovori na 7.6.**

**1.** 2,38 A; 76° 45′; 28,6 V; 117 V; 68 W; 277 VAR; 286 VA.

**2.** $0{,}1 \sin(5000\,t + \pi/2)$; $10 \sin(5000\,t + \pi/2)$; $10\sqrt{2} \sin(5000\,t + \pi/4)$; 0,5 W.

**3.** 99 μF.

**4.** 1,58 A; 36° 50′; 95 V; 53 μF.

**5.** 0,36 Ω; 530 μF.

**6.** 185,6 V; 1610 W; 1707 VAr; 0,688.

**7.** 100 V.

**8.** 910 Ω, 3,5 μF.

**9.** 9,4 A.

**10.** 3,5 Ω; 53,3 μF.

**11.** a) pokazivanje vatmetra se umanjuje do nule, pokazivanje ampermetra se povećava, b) pokazivanje instrumenata se uvećava.

**Odgovori na 7.7.**

**1.** 747 Ω; 0,167 A; 83,5 V; 126,2 V; 33,3 V; 13,9 W; 15,4 VA.

**2.** 50,7 μF.

**3.** 0,8 H.

**4.** 4,8 μF.

**5.** 60 V; 51 V; 2000 V; 2032 V.

**6.** 0,15 A; 38 V; 0; 16,5 VAr; 16,5 VA.

**7.** 97,5 sin $\omega t$; 56,5 sin $(\omega t + 90°)$; 56,5 sin $(\omega t - 90°)$; 69 V; 40 V.

**8.** 0,064 H; 5,7 ili 40 μF.

**9.** 197, 5 Ω; 0,42 ili 1,67 H.

**10.** 1730 Ω; 0,445 ili 1,08 H; 0,132 μF.

**11.** 35 Ω; 0,226 H; 89,6 μF.

**12.** 5 Ω; $3{,}2 \cdot 10^{-2}$ H; 159 μF; 71 Hz.

**13.** 3,18 μF; 63,5 μF; 50 Ω; 3,11 A; 4,4 A; 1,97 A; 485 W; 970 W; 194 W.

**14.** 203 V; 6,64 A; 440 W; 52,6 μF, $\varphi_u = -26°$; $\psi_i = 45°$.

**15.** 1) 10 $\sqrt{2}$ V; 45°). 2) 30 V; —53° 10′, 3) 5 V ili 15 V, +26° 35′, ili —26° 35′, 4) 20, $\sqrt{3}$ V ili 0; 60° ili —60°.

**16.** 156 Ω; 1,87 H.

**17.** 0,1 A; 28,5 V; 5,1 V 100 V; 33 V; 2,8 W; —10,78 VAr; 1,2 VA; $P_{R1} + P_{R2} + P_{R3} = 2 + 0{,}1 + 0{,}7 = 2{,}8$ W $= P$; $(Q_{L1} + Q_{L2}) - (Q_{c1} + Q_{c2}) = (2{,}0 + 0{,}50) - (9{,}96) + 3{,}32) = -10{,}78$ VAr $= Q$.

**18.** Aktivni otpor kola 280 Ω; kapacitet 0,36 μF.

**19.** 26 A; 222 V; 7,5 Ω.

**20.** 1400 Ω; 800 Ω; 105 V.

**21.** Pri $\varphi_2 > 0$ $U = 280$ V; $P = 5030$ W; $\cos\varphi = 0{,}717$; $\eta = 87{,}5\%$.
Pri $\varphi_2 < 0$ $U = 213$ V; $\cos\varphi = 0{,}945$.

**22.** 0,91; 0,97.

**23.** 1) $R_2 = \sqrt{R_1^2 + (X_1 + X_2)^2} = 8{,}55\ \Omega$; $I_1 = 51$ A; $U_2 = 522$ V; $P_{2max} = 22{,}2$ kW; $P = 24{,}8$ kW; $\cos\varphi = 0{,}735$; $\eta = 89{,}5\%$.
2) $R_2 = X_1 + X_2 - R_1 = 7{,}5\ \Omega$; $I = 55$ A; $U = 527$ V; $P_2 = 22{,}7$ kW; $P_{max} = 25{,}73$ kW; $\cos\varphi = 0{,}71$; $\eta = 88{,}1\%$

**Odgovori na 7.8.**

1. $6 \cdot 10^5$ Hz.
2. 2,2 A; 276 V; 276 V; 110 V; 6,35 μF.
3. 25 puta.
4. 2 H.
5. $6{,}4 \cdot 10^{-7}$ HF, 24 Ω.
6. 50,4 Hz; 46 Hz.

**Odgovori na 8.3.**

1. 0,5 A; 0,5 A; 0,707 A; 110 W; 110 VAr; 155,5 VA.
2. 0,5 A; 0,5 A; 0,79 A; 0,58 A.
3. 0,97 A; 0,2 A; 1,1 A.
4. 8,5 A; 12,0 A; 8,5 A.
5. 26, mA; 8,65 V; 5,0 V; 8,65 V; 5,0 V.
6. 4:3.
7. 800 W; 0,446; 10 Ω; ±20 Ω.
8. 16,1 A; 0,995.
9. 4,48 Ω; 0,895.
10. 78,3 V; 6,48 A; 0,987 ($\varphi_1 < 0$).
11. 4,13 Ω; $4{,}08 \cdot 10^{-2}$ H.
12. 24 Ω; 20 Ω; 1,02 H; 1,2 μF.
13. 3200 W; 8 Ω; 6 Ω.
14. $Z_1 = j\,10\ \Omega$; $Z_2 = (5\sqrt{3} - j\,5)\ \Omega$
15. 3,3 A.
16. 12 A; 4,8 A; 6 A; 14 A.
17. 618 V; 608 V; 9° 50′; 87,8%; 62,7%; 83%.
18. 0; 11 Ω; ili —24,4 Ω.
19. $(5 + j\,18{,}9)\ \Omega$.
20. 1) 4 A; 2,82 A; 3,6 A; 2a) 0,5 A; 4 A; 4,6 A. 2b) 14,66 A; 14,8 A; 14,3 A.

**Odgovori na 8.4.**

1. $C = 17\ \mu F$.

2. $1700\ \mu F$; $850\ \mu F$.

3. 356 kVA; 277,5 kVA; 707 A; 556 A.

4. 1,66 A.

5. $1870\ \mu F$.

6. 6,4 mH; $415\ \mu F$.

7. 0,67.

8. 18,7 A; 2300 W; 0,641; 14,35 A.

9. $46,3\ \mu F$; 17,6 kVA.

10. $29,5\ \mu F$; 11,2 kVA

**Odgovori na 8.5.**

1. 0,1 A; 0,14 A; 0,1 A; 20 V; 100 V.

2. 140 V; 298 V; 310 V.

3. 310 V.

4. $R = \frac{X \cdot X_2 - R_2}{R + R_2} = 720\ \Omega$.

5. $10\ \Omega$; $10\ \Omega$.

6. $10\sqrt{2}$.

7. 10 A; 500 W.

8. 288 W.

9. 2 A; 0,9 A; 1,8 A; 32 W.

10. 10 A; 14,1 A; 10 A.

11. 25 V; 11,2 A; 10 A.

12. 6,33 A; 10 A; 136,5 V; 840 W.

13. 3,16 A; 2,82 A; 1,41 A; 31,6 V; 80 W.

14. 11,2 A; 14,1 A; 5 A; 56 V; 625 W.

15. $2 \sin \omega t$ A; $4 \sin \omega t$ A; $2 \sin (\omega t - 180°)$ A; $2 \sin (\omega t - 90°)$ A; $160 \sin (\omega t + 90°)$ V; $120 \sin (\omega t - 90°)$ V;

16. $C = \dfrac{2 \cdot X_2}{\omega [R_2^2 + X_2^2 + L \cdot X_2]}$

17. 64,2 V; 1,4 kW; 0,725.

18. 102 V; 0,8

19. $(3 + j)$ A; $(1 - j\,3)$ A; $(2 + j\,4)$ A.

20. $(20 + j\,40)$ A; $(4 - j\,8)$ kVA; 0,448 $(\varphi < 0)$.

21. 10 Ω; —30 Ω.

**Odgovori na 9.1.**

1. 4 A; 2 A; 3 A; 1,73 A.
2. Po 3,64 A.
3. 1,82 A; 5,46 A; 7,28 A; 4,8 A.
4. 1,82 A; 5,46 A; 7.28 A; 4,8 A.
4. $I$.
5. 7,02 A; 6,05 A; 6,72 A; 0,54 A.
6. 6,5 A; 6,85 A.
7. 185 V; 259 V; 225 V.
8. 1) 248,5 V; 218,6 V; 195,7 V; 30 V; 2) 230 V; 219 V; 210 V; 11 V.

**Odgovori na 9.2.**

1. $I_f = I_L = 4{,}4$ A.
2. 1,57 A; 0,528 A.
3. 5,5 A.
4. 13,4 A.
5. 17,3 V; 13 V.
6. $I_A = I_B = I_C = 11$ A; $I_B = I_C = 9{,}5$ A; $I_A = 0$.
7. $I_A = I_B = {}_C = 6{,}35$ A; $I_A = I_C = 11$ A; $I_B = 19$ A.

**Odgovor na 9.3.**

1. 40 A; 69,2 A; 8,8 kW; 26,4 kW.
2. 20 A; 34,6 A; 4,56 kW, 13,68 kW
3. 88 A; 152,2 A; 2 A; 34,8 kW.

4. 2,5 A; 5 A; 10 A; 11,5 A; 6,6 A; 13,2 A.

5. 432 A; 384 A; 406 A; 730 A; 700 A; 700 A.

6. $Z_{AB} = (0{,}41 + j0{,}31)\ \Omega$; $Z_{BC} = (0{,}52 + j0{,}25)\ \Omega$; $Z_{CA} = (0{,}46 - j0{,}28)\ \Omega$.

7. 22 A; 22 A; 22 A; 42,5 A; 42,5 A; 22 A; 4840 W;

8. 302 A; 218 A; 264 A; 99 kW.

9. 78 V; 142 V; 220 V; 11,6 A; 11,6 A; 0.

10. Po 10 Ω svaka

## LITERATURA

1. Dr Josip Lončar: Osnovi elektrotehnike, knjiga prva i druga, Zagreb, 1956.

2. Inž. Živko Milovanović: Osnovi elektrotehnike I deo, Beograd, 1966.

3. Inž. Borisav Tasić: Naizmenične struje, Beograd, 1959.

4. Inž. Boris Tomić: Osnove elektrotehnike I i II deo. Zagreb 1966.

5. Томаш Гайах, Губерт Мелузин: Простейшие електротехнические расчеты; Москва, 1967.

6. Б. А. Апектеров, М. П. Иванова: Задачи и расчеты по електротехнике, Киев, 1965.

7. Докт. механ. наук проф. С. И. Куренева: Сборник задач по расчете електрических цепей, Москва, 1967.

8. М. Ю. Зайчик: Сборник задач и упражений по теоретической електротехнике, Москва, 1968.

9. Докт. техн. наук проф. К. М. Поливанова: Задачник по теоретическим основам елекротехники, Москва, 1967.

10. И. А. Зайцев, А. Г. Лурье: Задачник по теоретическим основам електротехники, Москва — Ленинград, 1961.

## SADRŽAJ

Muhamed Hajro, dipl. inž.: Zbirka zadataka iz elektrotehnike, IV izdanje — Recenzent: Rajko Misita — Za izdavača: Radomir Krivokapić, v. d. direktora — Urednik: Dušica Lučić — Grafički urednik: Jugoslav Bogdanović — Korektor: Mirjana Aćimović — Izdavač: NIRO »Tehnička knjiga«, Beograd 7. juli 26 — Štamparija: BIGZ, Beograd, Bulevar vojvode Mišića 17 — Tiraž: 4 000 primeraka — Oslobođeno poreza na promet na osnovu mišljenja Republičkog komiteta za kulturu SRS

**YU ISBN 86-325-0050-3**